

Micro-economie,  
Markten en prijzen <sup>1</sup>

Dirk Van de gaer

<sup>1</sup>© Dirk Van de gaer, Sint-Pietersplein 6, 9000 Gent. Niets van deze uitgave mag worden veeelvuldigd, gereproduceerd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm of op enige andere wijze zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de auteur.

# Voorwoord

De voorliggende cursus is de leidraad voor de theoretische lessen van zowel het vak “micro-economie” uit de tweede bachelor economische wetenschappen, toegepaste economische wetenschappen en handelsingenieur, verschillende schakelprogramma’s en voorbereidingsprogramma’s, als het vak “markten en prijzen”, keuzevak in vele bachelor en master programma’s aan de universiteit Gent.

Deze cursussen werden tot voor kort en dit gedurende 29 jaar gedoceerd door em. prof. dr. Eddy Omev. Een flinke portie van het materiaal van de eerste acht hoofdstukken in deze cursus is gebaseerd op zijn vroegere cursus. Ik ben hem dankbaar om, zonder enig voorbehoud, zijn vroeger lesmateriaal ter beschikking te stellen. Daarnaast ben ik ook veel dank verschuldigd aan Eline Moens voor het nalezen van de hele cursustekst en de vele nuttige en constructieve opmerkingen. Hierdoor is de kwaliteit en samenhang van het geheel flink verbeterd. Uiteraard ben alleen ik verantwoordelijk voor de fouten en tekortkomingen die nog in deze eerste versie van de cursustekst geslopen zijn.

Gent, September 2019  
Dirk Van de gaer

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleidende beschouwingen</b>	<b>1</b>
1.1	Inleiding . . . . .	1
1.2	Economische wetenschap . . . . .	1
1.2.1	Theoretische en toegepaste economie . . . . .	1
1.2.2	Micro- en macro-economie . . . . .	2
1.2.3	Evenwicht, comparatieve statica en dynamische analyse . . . . .	3
1.2.4	Inductieve en deductieve methodologie . . . . .	3
1.2.5	Empirische toetsing . . . . .	3
1.3	Elasticiteitsbegrip . . . . .	5
1.3.1	Inleiding . . . . .	5
1.3.2	Definitie . . . . .	7
1.3.3	Kenmerken van de elasticiteitscoëfficiënt . . . . .	11
1.3.4	Grafische afleiding van de elasticiteit . . . . .	14
1.3.5	Discrete observaties: boogelasticiteit . . . . .	18
1.3.6	Elasticiteit van een curve . . . . .	19
<b>I</b>	<b>Consumentengedrag</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>Bouwstenen consumentengedrag</b>	<b>23</b>
2.1	Inleiding . . . . .	23
2.2	Preferenties . . . . .	24
2.2.1	Basisaxiomas en fundamenteel theorema . . . . .	24
2.2.2	Monotoniciteitsaxioma's . . . . .	29
2.2.3	Convexiteitsaxioma's . . . . .	33
2.2.4	Indifferentiecurven en substitutie . . . . .	39
2.2.5	Constructie van een nutsfunctie . . . . .	42
2.3	Nutsfuncties . . . . .	43
2.3.1	Eigenschappen van nutsfuncties . . . . .	43
2.3.2	Nutsfunctie in driedimensionele ruimte . . . . .	44
2.3.3	Voorbeeld 1: Cobb Douglas nutsfunctie . . . . .	47
2.3.4	Voorbeeld 2: Leontief nutsfunctie . . . . .	49
2.3.5	Voorbeeld 3: lineaire nutsfunctie . . . . .	52
2.4	Budgetbeperking . . . . .	52
2.4.1	Definitie . . . . .	53
2.4.2	Veranderingen in de budgetrechte ten gevolge van veranderingen in de exogene variabelen . . . . .	54

<b>3</b>	<b>Het evenwicht van de consument</b>	<b>59</b>
3.1	Inleiding . . . . .	59
3.2	Het optimum . . . . .	59
3.2.1	Grafische bepaling van het optimum . . . . .	59
3.2.2	Algebraïsche bepaling van het optimum . . . . .	63
3.2.3	Voorbeeld: Cobb Douglas nutsfunctie . . . . .	65
3.3	Verschuivingen van het optimum . . . . .	67
3.3.1	Verandering in de preferenties . . . . .	67
3.3.2	Verandering van het inkomen . . . . .	69
3.3.3	Verandering van de prijsverhouding . . . . .	75
3.3.4	Samenhang van de individuele vraagelasticiteiten . . . . .	84
3.4	De vraag van de consument . . . . .	86
3.5	De marktvaart . . . . .	90
3.5.1	Definitie . . . . .	90
3.5.2	Directe prijselasticiteit van de marktvaart . . . . .	96
3.5.3	Kruisprijselasticiteit van de marktvaart . . . . .	107
3.5.4	Inkomenselasticiteit van de marktvaart . . . . .	107
3.5.5	Interacties tussen de individuele en de marktvaart . . . . .	109
<b>II</b>	<b>Producentengedrag</b>	<b>113</b>
<b>4</b>	<b>Bouwstenen producentengedrag</b>	<b>115</b>
4.1	Inleiding . . . . .	115
4.2	Productie technologie . . . . .	116
4.2.1	Definities . . . . .	116
4.2.2	Eigenschappen: monotoniteit en convexiteit . . . . .	117
4.2.3	Voorbeeld: Cobb Douglas . . . . .	120
4.2.4	Productiecoëfficiënten . . . . .	123
4.2.5	Wet van toe- en afnemende meerproductie . . . . .	127
4.2.6	Schaalopbrengsten . . . . .	130
4.2.7	Isoquanten en substitutie . . . . .	134
4.2.8	Homogene en homothetische technologieën . . . . .	140
4.2.9	Leontief technologie . . . . .	141
4.2.10	Lineaire technologie . . . . .	144
4.2.11	Technische coëfficiënten . . . . .	145
4.2.12	Samengestelde technologieën . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Kostenminimering</b>	<b>149</b>
5.1	Inleiding . . . . .	149
5.2	Het optimum . . . . .	149
5.2.1	Grafische bepaling van het optimum . . . . .	149
5.2.2	Algebraïsche bepaling van het optimum . . . . .	151
5.3	Verschuivingen van het optimum . . . . .	156
5.3.1	Veranderingen in de productieomvang . . . . .	156
5.3.2	Veranderingen in de technologie . . . . .	157
5.3.3	Veranderingen in de prijzen van de productiefactoren . . . . .	160
5.4	Kosten op korte en op lange termijn . . . . .	161

5.4.1	Inleiding . . . . .	161
5.4.2	Kosten op korte termijn . . . . .	162
5.4.3	Kosten op lange termijn . . . . .	180
<b>6</b>	<b>Winstmaximering</b>	<b>199</b>
6.1	Inleiding . . . . .	199
6.2	Korte termijn, horizontale prijs-afzet-curve . . . . .	204
6.2.1	Klassiek kostenverloop . . . . .	204
6.2.2	Lineair kostenverloop . . . . .	211
6.3	Korte termijn, lineair dalende prijs-afzet-curve . . . . .	215
6.3.1	Klassiek kostenverloop . . . . .	216
6.3.2	Lineair kostenverloop . . . . .	218
6.4	Lange termijn, horizontale prijs-afzet-curve . . . . .	220
6.4.1	Klassiek kostenverloop . . . . .	220
6.4.2	Cobb Douglas productiefunctie . . . . .	225
6.5	Lange termijn, lineaire dalende prijs-afzet-curve . . . . .	229
6.5.1	Klassiek kostenverloop . . . . .	229
6.5.2	Cobb Douglas productiefunctie . . . . .	230
<b>III</b>	<b>Marktvormen</b>	<b>233</b>
<b>7</b>	<b>Volkomen concurrentie</b>	<b>235</b>
7.1	Inleiding . . . . .	235
7.2	Marktevenwicht bij volmaakte concurrentie . . . . .	237
7.2.1	Marktevenwicht . . . . .	237
7.2.2	Consumenten- en producentensurplus . . . . .	239
7.2.3	Marktevenwicht: comparatieve statica . . . . .	242
7.2.4	Marktevenwicht en dynamica - spinnenwebtheorema . . . . .	244
7.3	Ondernemingsevenwicht . . . . .	249
7.4	Intermezzo: de proportionele vraagcurve . . . . .	252
7.5	Markt-, ondernemingsevenwicht en ongelijke efficiëntie . . . . .	255
7.6	Markt- en ondernemingsevenwicht bij variabele factorprijzen . . . . .	258
7.7	Besluit . . . . .	261
<b>8</b>	<b>Monopolie</b>	<b>267</b>
8.1	Inleiding . . . . .	267
8.2	Monopolie versus volmaakte concurrentie . . . . .	268
8.3	Natuurlijk monopolie . . . . .	272
8.3.1	Statische analyse . . . . .	272
8.3.2	Dynamische analyse . . . . .	273
8.4	Comparatieve statica: vraag- en aanbodverschuiving . . . . .	274
8.4.1	Vraagverschuiving . . . . .	274
8.4.2	Aanbodverschuiving . . . . .	274
8.5	Comparatieve statica: belastingen . . . . .	275
8.5.1	Procentuele winstbelasting . . . . .	276
8.5.2	Forfaitaire belasting . . . . .	277
8.5.3	Belasting op de productie . . . . .	278

8.5.4	Omzet belasting . . . . .	279
8.6	Prijsdiscriminatie . . . . .	281
8.6.1	Derde-graads prijsdiscriminatie . . . . .	281
8.6.2	Eerste en tweede graads prijsdiscriminatie . . . . .	286
8.7	Andere marktvormen met monopolie-achtige kenmerken . . . . .	288
8.7.1	Monopsonie . . . . .	288
8.7.2	Bilateraal monopolie . . . . .	290
8.7.3	Monopolistische concurrentie . . . . .	291
<b>9</b>	<b>Intermezzo: onzekerheid en speltheorie</b>	<b>299</b>
9.1	Onzekerheid . . . . .	299
9.1.1	Inleiding . . . . .	299
9.1.2	Loterijen en preferenties . . . . .	299
9.1.3	Risico afkerig, neutraal en verkiezend gedrag . . . . .	306
9.1.4	Maatstaven van risico afkerigheid . . . . .	308
9.1.5	Enkele veel gebruikte nutsfuncties . . . . .	314
9.2	Speltheorie . . . . .	314
9.2.1	Inleiding . . . . .	314
9.2.2	Simultane spelen . . . . .	316
9.2.3	Sequentiële spelen . . . . .	326
9.2.4	Herhaalde spelen . . . . .	329
<b>10</b>	<b>Oligopolie</b>	<b>333</b>
10.1	Inleiding . . . . .	333
10.2	Bertrand Competitie, simultaan spel, 2 producenten . . . . .	334
10.3	Cournot competitie, simultaan spel, 2 producenten . . . . .	338
10.4	Cournot competitie, oneindige horizon . . . . .	344
10.5	Cournot competitie, sequentieel spel . . . . .	348
10.6	Cournot competitie, simultaan spel, $n$ producenten . . . . .	350
10.7	Vergelijking verschillende homogene duopolie modellen . . . . .	354
10.8	Kostenverschillen . . . . .	355
10.8.1	Bertrand competitie . . . . .	355
10.8.2	Cournot competitie . . . . .	356
10.9	Duopolie met productdifferentiatie . . . . .	359
10.9.1	Cournot competitie . . . . .	360
10.9.2	Bertrand competitie . . . . .	365
10.9.3	Cournot-Bertrand competitie . . . . .	370
10.10	Vraagverschillen en productdifferentiatie . . . . .	374
10.10.1	Cournot competitie . . . . .	374
10.10.2	Bertrand competitie . . . . .	378
10.10.3	Cournot-Bertrand competitie . . . . .	381
10.11	Endogene productdifferentiatie . . . . .	384
<b>IV</b>	<b>Markfalingen</b>	<b>391</b>
<b>11</b>	<b>Efficiëntie van markten</b>	<b>393</b>
11.1	Inleiding . . . . .	393

11.2	Productie mogelijkheden en allocatie van consumptie . . . . .	393
11.3	Efficiënte allocatie . . . . .	397
11.4	Allocatie bij volkomen concurrentie . . . . .	403
<b>12</b>	<b>Marktfalingen</b>	<b>407</b>
12.1	Inleiding . . . . .	407
12.2	Onvolkomen concurrentie . . . . .	407
12.3	Externaliteiten . . . . .	409
12.3.1	Productie externaliteiten . . . . .	409
12.3.2	Consumptie externaliteiten . . . . .	413
12.3.3	Besluit . . . . .	423
12.4	Publieke goederen . . . . .	423
12.4.1	Efficiënte allocatie . . . . .	424
12.4.2	Marktfaling . . . . .	425
12.4.3	Overheidsvoorziening . . . . .	432
12.4.4	Clarke belasting / Vickrey-Groves-Clarke mechanisme . . . . .	433
<b>A</b>	<b>Appendices - voorlopig en onvolledig</b>	<b>437</b>
A.1	Elementaire algebra . . . . .	437
A.2	Functies en continuïteit . . . . .	437
A.3	Afgeleiden . . . . .	438
A.4	Optimeringsprobleem zonder randvoorwaarde . . . . .	440
A.5	Matrix algebra . . . . .	441





# Hoofdstuk 1

## Inleidende beschouwingen

### 1.1 Inleiding

In dit inleidende hoofdstuk situeren we eerst de micro-economie in de economische wetenschap. Vervolgens analyseren we het elasticiteitsbegrip. Dit begrip, en haar eigenschappen, komen voortdurend terug in de eerste drie delen van de cursus.

### 1.2 Economische wetenschap

Een wetenschap is een geheel van systematisch verkregen, geordende en verifieerbare (naar methode en empirische bevindingen) menselijke kennis rond een bepaald onderwerp. Het onderwerp van de economische wetenschap is het gedrag van agenten (consumenten, producenten, politici, belangengroepen, bureaucraten, internationale organisaties, ...), hun interacties (via de markt, onderhandelingen, geïnstitutionaliseerd overleg, ...) en het functioneren van de economische realiteit.

#### 1.2.1 Theoretische en toegepaste economie

Micro-economie is een onderdeel van de theoretische economie: de micro-economie zoekt naar verbanden tussen en oorzaken van economisch gedrag door abstracte economische modellen op te stellen en te analyseren.

Toegepaste economie daarentegen beroept zich op modellen die meer context gebonden zijn om een specifieke realiteit te analyseren, en is vaak normatief van aard. Onder de toegepaste economie vallen zowel bedrijfseconomische als algemeen economische vakken:

- bedrijfseconomische vakken: productiebeleid, accounting, personeelsbeleid, management, marketing, ...
- algemeen economische vakken: arbeidseconomie, begrotingsbeleid, monetaire economie, internationale economie, milieu-economie, publieke economie, ...

Het onderscheid tussen algemene economie en bedrijfseconomie is dus anders dan het onderscheid tussen theoretische economie en toegepaste economie. Toch wordt de term toegepaste economie in Vlaanderen decretaal voorbehouden voor bedrijfseconomische opleidingen. Dit is vrijwel uitsluitend in Vlaanderen het geval.

### 1.2.2 Micro- en macro-economie

Micro-economie vertrekt van de beslissingen van individuele agenten. De preferenties van de individuele agenten worden gemodelleerd. Zo wordt meestal verondersteld dat de consument voorkeuren tussen goederenbundels heeft, en dat de producent streeft naar winstmaximering. Vervolgens leidt een coördinatie-mechanisme tot een resultaat voor de economie als geheel. Voorbeelden van dergelijke mechanismen zijn het marktmechanisme of, in geplande economieën, het planmechanisme. Bij een marktmechanisme sturen veranderingen in relatieve prijzen het gedrag van de individuele agenten tot een evenwicht tussen vraag en aanbod op de markt tot stand komt. Bij een planmechanisme worden productiedoelstellingen opgelegd aan de producenten en worden de goederen via politiek bepaalde mechanismen verdeeld onder de consumenten.

Traditionele macro-economie bestudeert de interactie tussen sub-aggregaten (consumptie, sparen, inkomen, investeringen, geldhoeveelheid, ...) om te komen tot een resultaat voor de economie als geheel (nationaal product, nationaal inkomen, inflatie, economische groei, werkloosheid en tewerkstelling). In tegenstelling tot in de micro-economie gebeuren derhalve twee aggregaties in de macro-economie. Enerzijds wordt er geaggregeerd over goederen: meestal is er slechts één enkel aggregatief goed. Anderzijds wordt er geaggregeerd over consumenten: er wordt gekeken naar totale consumptie, totale investeringen, totale werkgelegenheid en zo verder.

De laatste decennia is in de macro-economie veel aandacht voor wat men noemt de micro-economische fundering van de macro-economie. Beide aggregatie assumpties worden dan losgelaten. De goederenaggregatie wordt losgelaten doordat verschillende soorten arbeid worden onderscheiden, of door de goederen een tijdsdimensie te geven (consumptie vandaag, volgend jaar, ...). Bovendien worden deze goederen verhandeld op een markt die expliciet gemodelleerd wordt. De aggregatie over individuen wordt minder extreem doordat hoog- en laaggeschoolden worden onderscheiden, of doordat verschillende generaties worden beschouwd.

Hierdoor zijn de technieken en begrippen die in de micro-economie gebruikt worden (nutsmaximering, winstmaximering, markt vormen) relevant voor de macro-economie. Het onderscheid tussen micro- en macro-economie is daarom vaak scherper inzake het object van studie dan inzake methodologie.

- Micro-economie bestudeert consumentengedrag, producentengedrag, markten en prijzen, prijsvorming op de markt van de productiefactoren, algemeen evenwicht, speltheorie, industriële economie, welvaartseconomie, arbeidseconomie, publieke keuze, effect van economische politiek (monetair beleid, begrotingsbeleid, prijsbeleid, inkomensbeleid, tewerkstellingsbeleid, herverdelingsbeleid, sociale zekerheid) op individuele welvaart, armoede en ongelijkheid, ...
- Macro-economie bestudeert macro-economische aggregaten (nationaal inkomen, ...), conjunctuurtheorie, groeitheorie, inflatie, werkloosheid, monetaire economie, effect van economische politiek (monetair beleid, begrotingsbeleid, prijsbeleid, inkomensbeleid, tewerkstellingsbeleid, herverdelingsbeleid, sociale zekerheid) op macro-economische aggregaten, ...

### 1.2.3 Evenwicht, comparatieve statica en dynamische analyse

Een evenwicht is een situatie waarin alle aanpassingen stoppen. In een evenwicht heeft geen enkele agent een reden om zijn beslissingen te herzien (iedereen bereikt, gegeven de waarden van alle voor hem exogene variabelen, de beste bundel gegeven zijn preferenties). Zolang de waarden van de aan het model exogene variabelen niet veranderen, blijven de waarden van de endogene variabelen, de variabelen die binnen het model bepaald worden, constant.

Indien een exogene variabele zich wijzigt, dan wordt het evenwicht verstoord. Comparatieve statica vergelijkt de nieuwe evenwichtssituatie met de oude. Dynamische analyse vraagt zich af of het nieuwe evenwicht automatisch wordt bereikt. Indien het dynamische systeem een nieuw evenwicht vindt, dan is het evenwicht stabiel. Wordt er geen nieuw evenwicht bereikt, dan is het labiel.

### 1.2.4 Inductieve en deductieve methodologie

Om wetenschappelijke kennis te verkrijgen worden twee methoden gebruikt: de inductieve en de deductieve.

De inductieve methode probeert via generalisatie van empirische waarnemingen tot een verklaring van de werkelijkheid te komen.

De deductieve methode vertrekt vanuit axiomas om tot inzicht te komen. Dit inzicht kan puur theoretisch van aard zijn, of betrekking hebben op de werkelijkheid. Is dit laatste het geval dan kan de theorie getoetst worden via experimenten.

Micro-economie is deductief van aard: bij het opstellen van de theorie wordt uitgegaan van diverse axioma's. Het cruciale axioma in de micro-economie is het rationaliteitsaxioma. Dit betekent dat de agent:

- op consistente wijze de alternatieven ordent volgens zijn preferenties (transitiviteit);
- alle mogelijke alternatieven in overweging neemt;
- rekening houdt met alle beschikbare informatie;
- het alternatief kiest dat het beste is, gegeven zijn preferenties.

Merk hierbij op dat niets inhoudelijk wordt gezegd over deze preferenties. Verschillende agenten kunnen verschillende preferenties hebben en bijgevolg in dezelfde omstandigheden verschillende beslissingen nemen.

Vaak (maar niet altijd) leidt theorievorming in de (micro-) economie tot voorspelde verbanden tussen economische grootheden. Die verbanden kunnen vervolgens getoetst worden.

### 1.2.5 Empirische toetsing

Een theoretisch model gericht op het ontdekken van verbanden tussen variabelen is steeds een abstractie van de werkelijkheid, waar men de invloed van één of meerdere factoren op een bepaald aspect van de werkelijkheid onderzoekt, en de overige factoren constant houdt. Als men de voorspellingen van het model empirisch wil toetsen, dan is het essentieel om die overige factoren constant te houden.

Voorbeeld 1 (fysica): temperatuur en aggregatietoestand

De temperatuur (A) beïnvloedt de aggregatietoestand van een stof (of deze in vaste, vloeibare of gasvorm voorkomt (B)). Tegelijkertijd is echter ook de luchtdruk (C) van belang voor de aggregatietoestand van de stof. Dit probleem wordt opgelost in een labo: via een experiment onderzoekt men de invloed van de temperatuur; tijdens het experiment wordt de luchtdruk constant houden.

In de economische wetenschap is de probleemstelling analoog. De laatste decennia gebeuren er meer en meer experimenten in de economie, waarbij men tracht een situatie te creëren die zoveel mogelijk andere factoren constant houdt.

Voorbeeld 2: Veilingen en marktevenwicht.

Chamberlain (1948, J Pol E) was de eerste om een experiment op te zetten om na te gaan of in veilingen de prijs en de verhandelde hoeveelheid tenderen naar hun evenwichtswaarden in een perfect concurrentiële markt.

Voor het experiment wordt een groep studenten in twee verdeeld. Groep 1 krijgt de rol van kopers. Elke van hen krijgt een kaart, met daarop de maximale prijs waartegen ze één eenheid van een goed kunnen kopen. Groep 2 krijgt de rol van verkopers. Zij krijgen elk een kaart met daarop de minimale prijs waartegen ze één eenheid van een goed kunnen verkopen. Vervolgens gaat elke student op zoek naar iemand om een koop mee te sluiten; als een koper en verkoper elkaar tegenkomen onderhandelen ze over de prijs; als ze tot een akkoord komen wordt de prijs publiek meegedeeld. De sessie duurt een vooraf bepaalde tijd. Dezelfde groep studenten speelt het spel meerdere keren (om leereffecten mogelijk te maken), waarbij het toeval bepaalt welke kaart ze bij elke sessie krijgen. Omdat de onderzoekers weten welke kaarten uitgedeeld zijn kunnen ze de perfect competitieve evenwichtsprijs en -hoeveelheid berekenen. De belangrijkste bevindingen van het experiment waren de volgende:

- transacties gebeuren tegen uiteenlopende prijzen;
- de gemiddelde prijs ligt wat onder de perfect competitieve evenwichtsprijs;
- het aantal afgesloten transacties ligt wat hoger dan in het perfect competitieve evenwicht.

De afwijkingen van het perfect competitieve evenwicht zijn vrij beperkt. Chamberlain verklaart ze door imperfecties in de veilingprocedure van het experiment: als een koper en verkoper tot een akkoord gekomen zijn treden ze uit de markt, en kunnen door een andere verkoper / koper niet meer benaderd worden om een akkoord te sluiten, zelfs als dit voor beiden voordelig is. Vernon Smith (1962 J Pol E; 1965, J pol E) werkte varianten op het experiment van Chamberlain uit.

Voorbeeld 3: Gerandomiseerde controleproeven.

Bij gerandomiseerde controleproeven worden de personen die deelnemen aan een experiment lukraak toegewezen aan een behandelde groep of een controle groep (die geen behandeling of een placebo behandeling krijgt). Als de steekproef voldoende groot is, dan zal het toeval ervoor zorgen dat de invloed van de andere bepalende factoren op de gemiddelde uitkomst van de controlegroep en de behandelde groep even groot is. Bijgevolg kan

men door de gemiddelde uitkomst van beide groepen te vergelijken nagaan of de behandeling al dan niet een effect heeft gehad.

Deze methode is de standaard methode in de medische wetenschap, waar men het effect van medicatie op patiënten standaard nagaat op deze manier. Ze wordt meer en meer gebruikt in de economische wetenschap, bijvoorbeeld om de gevolgen van voorwaardelijke monetaire transferten na te gaan.

In vele landen met een laag of gemiddeld inkomensniveau observeert men dat arme families vaak hun kinderen thuis houden van school, omdat zij moeten werken of meehelpen in het huishouden. Om ouders er toe aan te zetten om hun kinderen toch naar school te sturen, hebben verschillende landen een systeem van voorwaardelijke monetaire transferten voor arme families ontwikkeld. Indien de kinderen een bepaalde minimale tijd aanwezig zijn op school (bijvoorbeeld 85 %), dan krijgt de familie hiervoor een geldbedrag uitgekeerd. Meestal stijgt het bedrag naarmate de kinderen ouder worden (typisch tot op het einde van het primair of secundair onderwijs).

Het gaat hier soms over grootschalige projecten. De meest bestudeerden zijn

- Mexico: Progresá (1997) - Oportunidades (2002) - Prospera (2013). In 2010 namen 5.8 miljoen families deel ; goed voor 1/4 van de Mexicaanse bevolking en werd er ongeveer 4.8 miljard USD aan cash verdeeld;
- Brazilië: Bolsa familia (2003). In 2015 namen 14 miljoen families deel; het budget voor het programma bedroeg meer dan 9 miljard USD.

Om het effect van deze voorwaardelijke monetaire transferten na te gaan werd in Mexico het systeem geïmplementeerd in sommige gemeenten en niet in andere. In welke gemeente het systeem werd geïmplementeerd werd via het toeval bepaald. Door de uitkomsten te vergelijken van kinderen in gemeenten met en zonder het programma heeft men vastgesteld dat de fractie van de kinderen die na hun diploma van lager onderwijs zich inschrijven in het secundaire onderwijs door het programma verhoogde van 40% naar 52%.

Vaak is het echter niet mogelijk omwille van ethische (economie gaat over mensen) of praktische redenen om de andere factoren constant te houden. Neem het basismodel van het consumentengedrag. Als de prijs stijgt (A), dan vermindert de vraag van de consument (B). In realiteit zal vaak ook het inkomen (C) zich wijzigen.

Bij gebrek aan laboratoriumomstandigheden zijn economen aangewezen op geregistreerd gedrag (vaak via enquêtes), tot stand gekomen in situaties waarin heel veel omstandigheden gelijktijdig veranderden. Om dan toch de andere omstandigheden constant te houden worden statistische technieken gebruikt. De econometrie is de deelwetenschap van de economie die zich richt op het ontwerpen van betrouwbare statistische methoden, aangepast aan de aard van de data waarover de onderzoeker beschikt (discrete data / continue data; cross-sectie / tijdsreeks / panel data, ...).

## 1.3 Elasticiteitsbegrip

### 1.3.1 Inleiding

Indien we een relatie tussen twee economische variabelen  $X$  en  $Y$  hebben, weergegeven door de functie  $Y(X) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dan zijn we vaak geïnteresseerd in, enerzijds, de richting van de

relatie: of het verband positief of negatief is, en, anderzijds, de intensiteit van het verband: of het verband sterk of zwak is. Op het eerste zicht lijkt het een goed idee om, indien de functie afleidbaar is (wat we meestal veronderstellen), te kijken naar de eerste afgeleide van de functie,

$$\frac{\partial Y(X)}{\partial X}.$$

Een positieve afgeleide betekent dat het verband positief is: als  $X$  stijgt, dan stijgt  $Y$ , een negatieve afgeleide betekent dat het verband negatief is: als  $X$  stijgt, dan daalt  $Y$ . De absolute waarde van de eerste afgeleide, wat we noteren als  $\left| \frac{\partial Y(X)}{\partial X} \right|$  geeft een indicatie van de intensiteit van het verband: hoe groter deze absolute waarde, hoe sterker  $Y$  reageert op veranderingen in  $X$ .

Veronderstel dat de vraag naar een goed  $X$  als functie van de prijs  $p$  van het goed gegeven wordt door de vraagcurve  $X(p) = 30 - 3p$ . In dat geval is

$$\frac{\partial X(p)}{\partial p} = -3 \text{ en } \left| \frac{\partial X(p)}{\partial p} \right| = 3.$$

Het teken van de eerste afgeleide is negatief; het verband tussen  $p$  en  $X$  is negatief. Indien  $p$  stijgt met één eenheid, dan daalt  $X$  met drie eenheden. De absolute waarde van de verandering in  $X$  is drie eenheden.

De eerste afgeleide heeft echter een aantal belangrijke tekortkomingen.

Ten eerste is de afgeleide afhankelijk van de meeteenheid. Veronderstel dat de vraag naar een goed, uitgedrukt per kilogram, gegeven wordt door

$$X(p) = 10 - p.$$

Definieer  $Z = \frac{1}{2}X$  als de vraag naar het goed per twee kilogram, zodat

$$Z(p) = 5 - \frac{1}{2}p.$$

Het gaat in beide gevallen om dezelfde vraag, maar

$$\frac{\partial X(p)}{\partial p} = -1 \text{ terwijl } \frac{\partial Z(p)}{\partial p} = -1/2,$$

zodat de partiële afgeleide wel het teken behoudt, maar een verschillende maatstaf van intensiteit oplevert, afhankelijk van de eenheden waarin de vraag wordt uitgedrukt (in het voorbeeld: per kilogram of per twee kilogram).

Ten tweede leidt de afgeleide tot verschillende conclusies bij dezelfde relatieve wijzigingen. Beschouw de volgende vraag naar twee goederen,  $X$  en  $Y$ , beiden uitgedrukt in dezelfde eenheden (bijvoorbeeld kilogram).

$$X(p_x) = 10 - p_x \text{ en } Y(p_y) = 5 - \frac{1}{2}p_y,$$

met  $p_x$  de prijs van  $X$  en  $p_y$  de prijs van  $Y$ . De volgende tabel geeft de vraag naar beide goederen voor 2 prijzen.

$X(8)=2$	$Y(8) = 1$
$X(4)=6$	$Y(4) = 3$

We zien dat, als de prijs halveert, de gevraagde hoeveelheid verdrievoudigt:  $X$  en  $Y$  reageren met dezelfde intensiteit op dezelfde relatieve prijswijziging. Echter, omdat 1 het dubbel is van  $1/2$ , zegt de absolute waarde van de eerste afgeleide dat  $X$  dubbel zo sterk reageert als  $Y$ .

Ten derde is de afgeleide niet geschikt om goederen die in verschillende eenheden worden gemeten te vergelijken. Stel dat de vraag naar goed  $X$  wordt gemeten in kilogram, en de vraag naar goed  $Q$  in liter. De vraag naar de goederen wordt gegeven door

$$X(p_x) = 10 - p_x \text{ en } Q(p_q) = 10 - 2p_q,$$

met  $p_x$  de prijs van  $X$  en  $p_q$  de prijs van  $Q$ . We hebben dan

$$\left| \frac{\partial X(p_x)}{\partial p_x} \right| = 1 \text{ en } \left| \frac{\partial Q(p_q)}{\partial p_q} \right| = 2.$$

Bijgevolg lijkt het alsof  $Q$  intenser reageert op prijsveranderingen dan  $X$ , maar is dat zo? Is een reactie van 2 liter groter dan de reactie van 1 kilogram?

De oplossing voor deze problemen is om de veranderingen in de variabelen uit te drukken in relatieve termen: gegeven de relatie  $Y(X)$  kijken we niet naar  $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ , de verandering in  $Y$  ten gevolge van de verandering in  $X$ , maar wel naar de procentuele verandering in  $Y$  ten gevolge van een procentuele verandering in  $X$ :

$$e_X^Y = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X}{X}}.$$

Dit is de elasticiteit van  $Y$  met betrekking tot  $X$ . De elasticiteit is een dimensieloos of onbenoemd getal. Stel, bijvoorbeeld, dat de prijs van een goed,  $p_x$ , stijgt van 200 naar 220 euro per kg, waardoor de gevraagde hoeveelheid,  $X$ , daalt van 100 naar 95 kg. We vinden dan voor de prijselasticiteit van de vraag,

$$e_{p_x}^X = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{\frac{\Delta p_x}{p_x}} = \frac{\frac{-5 \text{ kg}}{100 \text{ kg}}}{\frac{\Delta 20 \text{ euro}}{200 \text{ euro}}} = \frac{-0.05}{0.10} = -0.5,$$

een dimensieloos getal.

### 1.3.2 Definitie

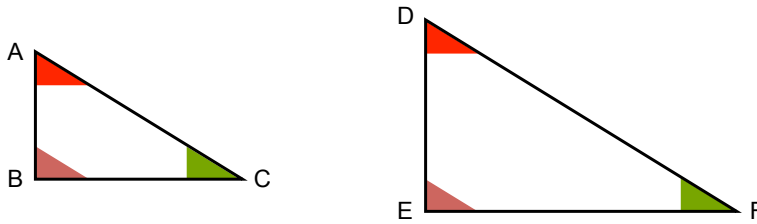
We vertrekken van de discrete definitie van de elasticiteit, de boogelasticiteit.

**Definitie 1** *Boogelasticiteit:* Wanneer we gaan van het punt  $A = (X^A, Y^A)$  naar een punt  $B = (X^B, Y^B)$  op de grafiek van een functie  $Y(X) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dan is de boogelasticiteit in het punt  $A$ ,  $e_X^Y(A)$ , gelijk aan  $\frac{\Delta Y}{Y^A} = \frac{Y^B - Y^A}{Y^A}$ , de procentuele verandering in  $Y$ , gedeeld door  $\frac{\Delta X}{X^A} = \frac{X^B - X^A}{X^A}$ , de procentuele verandering in  $X$ :

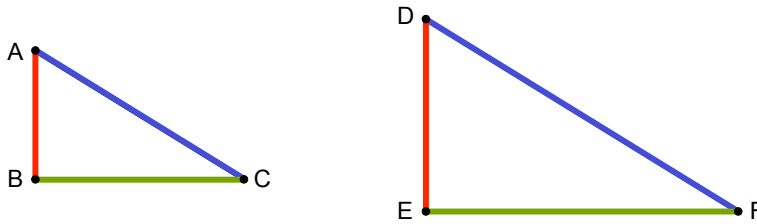
$$e_X^Y(A) = \frac{\frac{\Delta Y}{Y^A}}{\frac{\Delta X}{X^A}} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \frac{X^A}{Y^A} = \frac{Y^B - Y^A}{X^B - X^A} \frac{X^A}{Y^A}.$$

Vooraleer verder te kunnen gaan hebben we een eigenschap nodig van gelijkvormige driehoeken. Gelijkvormige driehoeken zijn driehoeken waarvan de hoeken 2 aan 2 gelijk zijn, zoals in figuur 1.1. Hoeken  $A$ ,  $B$  en  $C$  van de linker driehoek zijn gelijk aan, respectievelijk, hoeken  $D$ ,  $E$  en  $F$  van de rechter driehoek. Daarom is driehoek  $ABC$  gelijkvormig met driehoek  $DEF$ , wat we noteren als  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

Figuur 1.1: Gelijkvormige driehoeken



**Lemma 1** Als  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  dan geldt dat de verhouding tussen de lengte van 2 overeenkomstige zijden voor alle zijden gelijk is. Gegeven de driehoeken in de volgende figuur



geldt derhalve dat

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF},$$

waarbij de notatie “ $VW$ ” staat voor de lengte van het lijnstuk tussen de punten “ $V$ ”, en “ $W$ ”, met  $V$  en  $W \in \{A, B, C, D, E, F\}$ .

Gebruik makend van deze eigenschap vinden we een relatie tussen de boogelasticiteit en de tangens van de hoek  $\alpha$  in figuur 1.2.

We berekenen de boogelasticiteit in het punt  $A$ , op basis van de verandering van  $A$  naar  $B$ , zodat

$$\Delta Y = Y^B - Y^A < 0 \text{ en } \Delta X = X^B - X^A > 0.$$

Bijgevolg

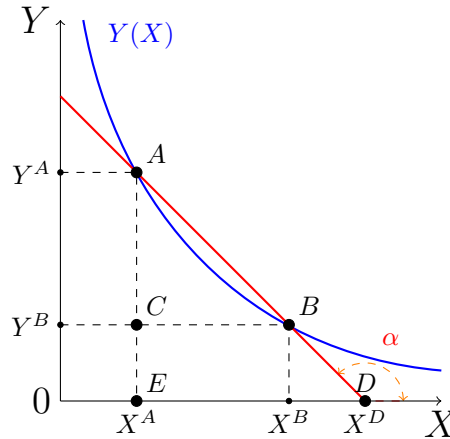
$$e_X^Y(A) = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X}{X^A}} = \frac{\frac{Y^B - Y^A}{Y^A}}{\frac{X^B - X^A}{X^A}} = \frac{Y^A - Y^B}{X^A - X^B} \frac{X^A}{Y^A}.$$

Aangezien  $\Delta ABC \sim \Delta ADE$  geldt

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{ED} \Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AE}{ED} \Leftrightarrow \frac{Y^A - Y^B}{X^A - X^B} = \frac{Y^A - 0}{X^A - X^D} = \tan(\alpha),$$



Figuur 1.2: Boogelasticiteit



Zodat

$$e_X^Y(A) = \tan(\alpha) \frac{X^A}{Y^A}.$$

Indien we in de definitie van de boogelasticiteit in een punt (zie definitie 1) de verandering  $\Delta X$  naar nul laten gaan, dan krijgen we de puntelasticiteit.

**Definitie 2** *Puntelasticiteit:* De puntelasticiteit van een functie  $Y(X) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  in een punt  $A = (X^A, Y^A)$  is

$$\varepsilon_X^Y(A) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} e_X^Y = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta Y}{Y^A}}{\frac{\Delta X}{X^A}} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} \frac{X^A}{Y^A} = \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{X^A}{Y^A},$$

waarbij de afgeleide geëvalueerd wordt in het punt  $A$ .

Grafisch betekent dit dat in figuur 1.2 het punt  $B$  langsheen de blauwe  $Y(X)$ -curve opschuift in de richting van  $A$  en de rode rechte die door  $A$  en  $B$  gaat meetrekt; uiteindelijk vallen de punten  $A$  en  $B$  samen, en wordt de rode rechte de raaklijn aan de blauwe curve in het punt  $A$ , zoals geïllustreerd in figuur 1.3a. De discrete verandering van  $A$  naar  $B$  wordt dan vervangen door de helling van de raaklijn aan de blauwe curve in het punt  $A$ , zodat inderdaad

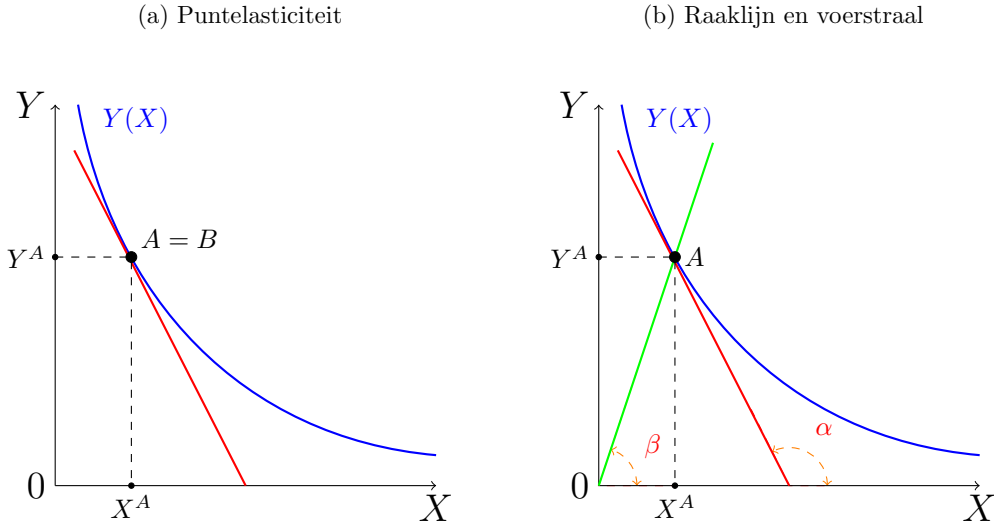
$$\varepsilon_X^Y(A) = \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{X^A}{Y^A} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial X}}{\frac{Y^A}{X^A}},$$

met  $\frac{\partial Y}{\partial X}$  de richtingscoëfficiënt van de raaklijn door  $A$ .

De rode rechte in figuur 1.3b is de raaklijn aan de blauwe curve in het punt  $A$ . De voerstraal door een bepaald punt is de rechte die door dit punt en de oorsprong gaat. De groene rechte in figuur 1.3b is de voerstraal door het punt  $A$ . De helling van deze voerstraal is gelijk aan  $Y^A$  gedeeld door  $X^A$ . Bijgevolg geldt volgend theorema.

**Theorema 1** *De elasticiteit  $\varepsilon_X^Y$ , de raaklijn en de voerstraal:* De elasticiteit  $\varepsilon_X^Y$  in een bepaald punt is gelijk aan de helling van de raaklijn aan  $Y(X)$  in dat punt gedeeld door de helling van de voerstraal door dat punt.

Figuur 1.3: Puntelasticiteit



In figuur 1.3b is de helling van de raaklijn gelijk aan  $\tan(\alpha)$ , de tangens van de hoek  $\alpha$  en de helling van de voerstraal  $\tan(\beta)$ , de tangens van de hoek  $\beta$ . Bijgevolg wordt, omwille van theorema 1 de puntelasticiteit ook gevonden als

$$\varepsilon_X^Y(A) = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)},$$

de verhouding tussen de tangens van de hoek tussen de raaklijn en de  $X$ - as en de tangens van de hoek tussen de voerstraal en de  $X$ - as.

Ten slotte gelden de volgende theoremas.

**Theorema 2** *De elasticiteit  $\varepsilon_X^Y$  en de verhouding  $Y(X)/X$ : De elasticiteit  $\varepsilon_X^Y$  is kleiner (groter) dan één als en slechts als de verhouding  $Y/X$  afneemt als  $X$  toeneemt.*

**Bewijs.**

$$\frac{\partial\left(\frac{Y(X)}{X}\right)}{\partial X} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{1}{X} - \frac{Y}{X^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Y}{\partial X} < \frac{Y}{X} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\frac{\partial Y}{\partial X}}{\frac{Y}{X}}}_{\varepsilon_X^Y} < 1.$$

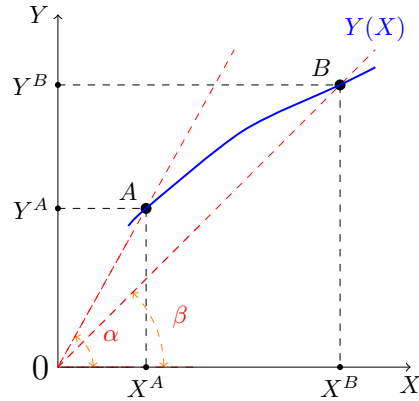
■

Aangezien  $Y/X$  de helling van de voerstraal is hebben we volgende eigenschap.

**Theorema 3** *De elasticiteit  $\varepsilon_X^Y$  en de helling van de voerstraal: De elasticiteit  $\varepsilon_X^Y$  is kleiner (groter) dan één als en slechts als de helling van de voerstraal afneemt (toeneemt) als  $X$  toeneemt.*

Als, in figuur 1.4 de waarde van  $X$  stijgt van  $X^A$  naar  $X^B$  begeben we ons op de figuur van het punt  $A$  naar het punt  $B$ . De helling van de voerstraal door  $B$  is kleiner dan de helling van de voerstraal door  $A$ : de helling van de voerstraal neemt af als  $X$  toeneemt. Bijgevolg is, omwille van theorema 3, de elasticiteit  $\varepsilon_X^Y < 1$ .

Figuur 1.4: Grootte elasticiteit en helling voerstraal



### 1.3.3 Kenmerken van de elasticiteitscoëfficiënt

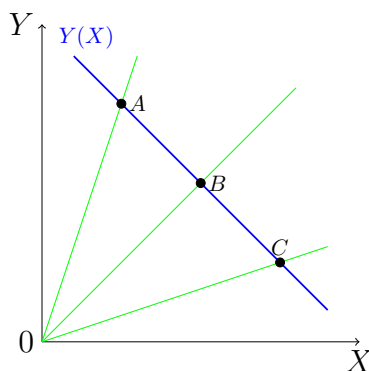
De elasticiteitscoëfficiënt heeft volgende kenmerken.

Ten eerste is de elasticiteit een dimensieloos of onbenoemd getal. Hierdoor heeft de elasticiteitscoëfficiënt, in tegenstelling tot de richtingscoëfficiënt, volgende aantrekkelijke eigenschappen: ze is onafhankelijk van de meeteenheid, ze beoordeelt gelijke relatieve veranderingen op gelijke manier en ze is vergelijkbaar voor verschillende goederen.

Ten tweede, aangezien  $X$  en  $Y$  positief zijn, is het teken van de elasticiteit gelijk aan het teken van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn.

Ten derde, de elasticiteit is normaliter geen constante, maar verschilt van punt tot punt. Beschouw, bijvoorbeeld de lineaire functie in figuur 1.5.

Figuur 1.5: Elasticiteit lineaire functie



De elasticiteit is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gedeeld door de richtingscoëfficiënt van de voerstraal - zie theorema 1. In elk van de punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  is

de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan de helling van  $Y(X)$ ; aangezien de functie  $Y(X)$  een rechte is met een negatieve helling, is deze helling in elk van deze punten hetzelfde negatieve getal. De richtingscoëfficiënt van de voerstraal is echter groter in  $A$  dan in  $B$ , en groter in  $B$  dan in  $C$ . Bijgevolg geldt

$$0 > \varepsilon_X^Y(A) > \varepsilon_X^Y(B) > \varepsilon_X^Y(C).$$

Er bestaat echter een belangrijke klasse van functies die iso-elastisch zijn. Dit zijn de graadsfuncties. Een functie  $Y(X) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  is een graadsfunctie als en slechts als ze kan geschreven worden als

$$(1.1) \quad Y(X) = aX^b,$$

met  $a$  en  $b$  constanten en  $a > 0$ . Voor deze functie is

$$\begin{aligned} \varepsilon_X^Y &= \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{X}{Y} = abX^{b-1} \frac{X}{aX^b} \\ &\Downarrow \\ \varepsilon_X^Y &= bX^{b-1+1-b} = bX^0 = b. \end{aligned}$$

Met deze specificatie is de parameter  $b$  de (constante) elasticiteit. Specificatie (1.1) omvat een aantal bijzondere gevallen:

- voor  $b = 0$  wordt (1.1)  $Y = aX^0 = a$ , en de functie is een rechte parallel met de horizontale as;
- voor  $b = 1$ , wordt (1.1)  $Y = aX$ , en de functie is een rechte door de oorsprong met richtingscoëfficiënt gelijk aan  $a$ ;
- voor  $b = -1$  wordt (1.1)  $Y = \frac{a}{X}$ , en de functie is een orthogonale hyperbool.

Naast de graadsfuncties is er nog één andere relatie die iso-elastisch is, de rechte die evenwijdig loopt met verticale as, en gegeven wordt door de vergelijking  $X = a$ . Voor deze functie is de elasticiteit oneindig. Figuur 1.6 toont de 4 iso-elastische functies.

In figuur 1.6a zien we dat, in om het even welk punt, de raaklijn en de voerstraal identiek zijn. Bijgevolg is de helling van de raaklijn gelijk aan de helling van de voerstraal, waardoor de elasticiteit gelijk wordt aan één. Voor de orthogonale hyperbool, weergegeven in figuur 1.6b, vinden we

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{a}{X^2} \text{ en } \frac{X}{Y} = X \cdot \frac{X}{a} = \frac{X^2}{a},$$

zodat

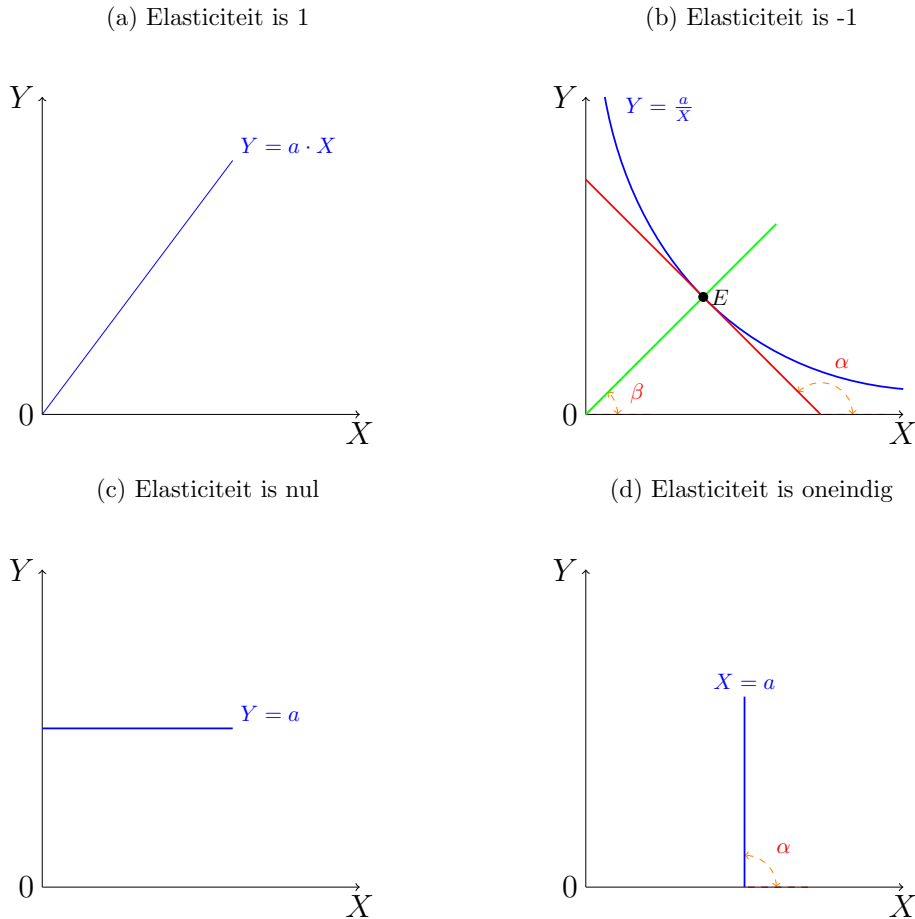
$$\varepsilon_X^Y = \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{X}{Y} = -\frac{a}{X^2} \frac{X^2}{a} = -1.$$

In figuur 1.6c is, in om het even welk punt, de helling van de raaklijn gelijk aan nul. Bijgevolg is de elasticiteit gelijk aan nul. In figuur 1.6d is de hoek  $\alpha$  negentig graden. De limietwaarde van de tangens van een hoek die naar negentig graden gaat is gelijk aan oneindig. Bijgevolg is de elasticiteit gelijk aan oneindig.

De puntelasticiteit wordt soms, aangezien  $Y, X > 0$ , ook gedefinieerd als de dubbele logaritmische afgeleide

$$\varepsilon_X^Y(A) = \frac{\partial \ln(Y)}{\partial \ln(X)},$$

Figuur 1.6: Iso-elastische functies



waarbij de afgeleide geëvalueerd wordt in het punt  $A$ . Deze definitie is equivalent aan de vorige, want

$$\frac{\partial \ln(Y)}{\partial \ln(X)} = \frac{\partial \ln(Y)}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \ln(X)} = \frac{1}{Y} \frac{\partial Y}{\partial X} X = \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{X}{Y}.$$

Voor graadsfuncties gedefinieerd in vergelijking (1.1) geldt

$$Y = aX^b \Leftrightarrow \ln(Y) = \ln(a) + b \cdot \ln(X),$$

waaruit onmiddellijk volgt dat  $\varepsilon_X^Y = \frac{\partial \ln(Y)}{\partial \ln(X)} = b$ , een constante.

Economen baseren zich op de omvang van de elasticiteit om een uitspraak te doen over de intensiteit van het verband tussen 2 variabelen. Meer bepaald, een economische relatie  $Y(X)$ , is in een bepaald punt

- volkomen elastisch  $\Leftrightarrow |\varepsilon_X^Y| = \infty$ ;
- volkomen inelastisch  $\Leftrightarrow |\varepsilon_X^Y| = 0$ ;

- (relatief) elastisch  $\Leftrightarrow |\varepsilon_X^Y| > 1$ ;
- (relatief) inelastisch  $\Leftrightarrow |\varepsilon_X^Y| < 1$ .

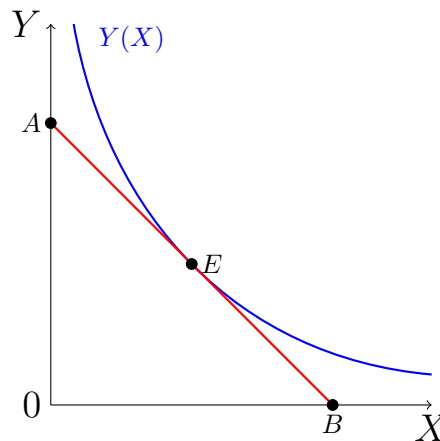
### 1.3.4 Grafische afleiding van de elasticiteit

Het volgend theorema zegt hoe we de elasticiteit grafisch kunnen afleiden.

**Theorema 4** *Grafische afleiding van de elasticiteit: De puntelasticiteit van  $Y(X) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  in een punt  $E$  kan gevonden worden door de raaklijn te bepalen aan de functie  $Y(X)$  in dat punt  $E$ , en de verhouding te nemen tussen enerzijds de afstand van het punt  $E$  tot het snijpunt van de raaklijn en de verticale as en anderzijds de afstand van het punt  $E$  tot het snijpunt van de raaklijn en de horizontale as.*

Figuur 1.7 illustreert het theorema.

Figuur 1.7: Grafische afleiding elasticiteit



Volgens het theorema vinden we de puntelasticiteit van  $Y(X)$  in het punt  $E$  door de afstand  $EA$  te delen door  $EB$ :

$$\varepsilon_X^Y(E) = \frac{EA}{EB}.$$

Merk op dat het hier gaat om een directionele afstand, zodat  $EA$  en  $EB$  een tegengesteld teken hebben en de elasticiteit in figuur 1.7 negatief is. We bewijzen het theorema grafisch, gebruik makend van figuur 1.8.

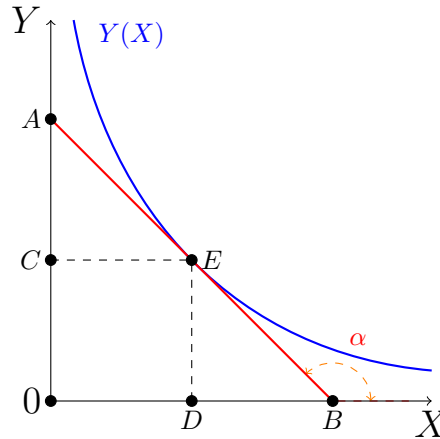
**Bewijs.** De elasticiteit in het punt  $E$  vinden we door gebruik te maken van de reeds geziene relaties:

$$\varepsilon_X^Y(E) = \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{X}{Y} = \tan(\alpha) \frac{X}{Y} = \frac{0A}{B0} \frac{D0}{C0}.$$

We zien dat  $\Delta 0AB \sim \Delta CAE$ , waaruit volgt dat

$$\frac{0A}{CA} = \frac{B0}{EC} \Rightarrow \frac{0A}{B0} = \frac{CA}{EC},$$

Figuur 1.8: Grafische afleiding elasticiteit



zodat

$$\varepsilon_X^Y(E) = \frac{CA \cdot D0}{EC \cdot C0}.$$

Nu is bovendien  $D0 = EC$ , zodat

$$\varepsilon_X^Y(E) = \frac{CA \cdot EC}{EC \cdot C0} = \frac{CA}{C0}.$$

En we zien dat  $C0 = ED$ , zodat uit de vorige uitdrukking volgt

$$\varepsilon_X^Y(E) = \frac{CA}{ED}.$$

We zien dat  $\triangle CEA \sim \triangle DBE$ , wat impliceert dat

$$\frac{CA}{DE} = \frac{EA}{BE} \Rightarrow \frac{CA}{ED} = \frac{EA}{EB}.$$

Bijgevolg

$$\varepsilon_X^Y(E) = \frac{EA}{EB}.$$

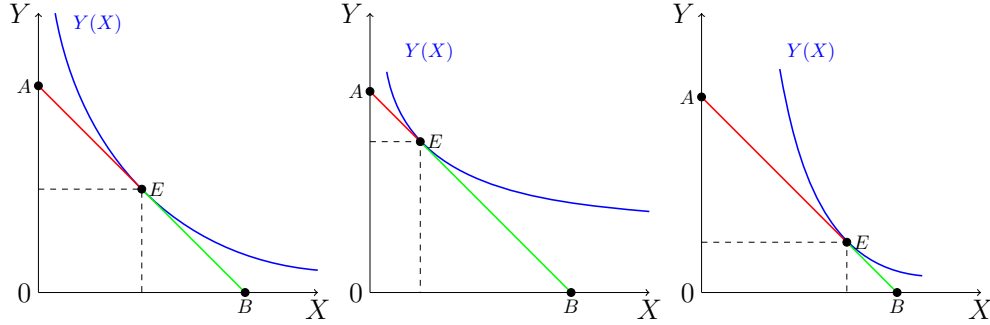
■

De volgende figuren tonen dat het theorema ons toelaat om de elasticiteit van een functie snel in te schatten. We schatten eerst de elasticiteit in van de dalende functies in figuur 1.9.

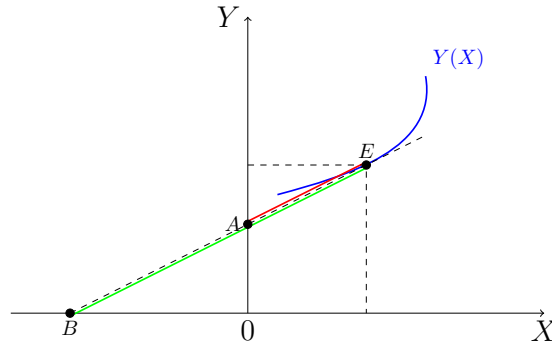
De elasticiteit in al deze figuren wordt gevonden als  $\frac{EA}{EB}$ , de lengte van het rode lijnstuk gedeeld door de lengte van het groene lijnstuk. De richting van de afstand is tegengesteld in teken, zodat de elasticiteiten allen negatief zijn. In figuur 1.9a zien we dat de afstand  $EA$  ongeveer minus de afstand  $EB$  is, zodanig dat de elasticiteit ongeveer  $-1$  moet zijn. In figuur 1.9b zien we dat de absolute waarde van de afstand  $EA$  veel kleiner is dan de absolute waarde van de afstand  $EB$ , zodat de elasticiteit groter is (minder negatief) dan  $-1$ . In figuur 1.9c zien we het tegenovergestelde: de absolute waarde van de afstand  $EA$  is veel groter dan de absolute waarde van de afstand  $EB$ , zodat de elasticiteit kleiner is (meer negatief) dan  $-1$ .

Figuur 1.9: Elasticiteit dalende functies

- (a) Elasticiteit ongeveer  $-1$       (b) Elasticiteit  $> -1$       (c) Elasticiteit  $< -1$



Figuur 1.10: Elasticiteit stijgende functie



Het theorema kan ook gebruikt worden om de elasticiteit in te schatten van stijgende functies. We illustreren dit aan de hand van figuur 1.10.

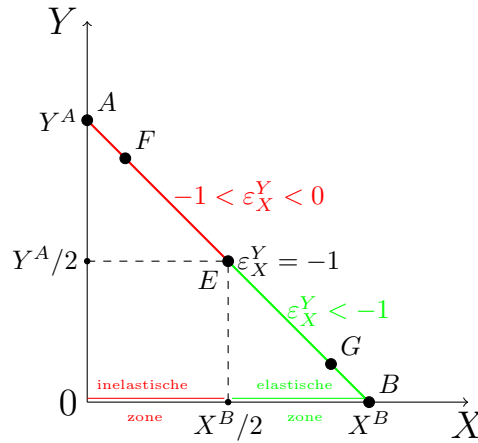
Ook hier wordt de elasticiteit gegeven door  $\frac{EA}{EB}$ , de lengte van het rode lijnstuk gedeeld door de lengte van het groene lijnstuk. We zien dat de afstand  $EA$  en  $EB$  in dezelfde richting gemeten wordt, zodat de elasticiteit positief is. Bovendien is de afstand  $EA$  kleiner dan de helft van de afstand  $EB$ , wat betekent dat de elasticiteit in het punt  $E$  van deze functie kleiner is dan  $1/2$ .

Tot slot bekijken we de elasticiteit van lineaire functies. Figuur 1.11 beschouwt de lineair dalende functie gegeven door de rechte door de punten  $A$  en  $B$ .

De elasticiteit wordt gegeven door  $\frac{EA}{EB}$ . In het punt  $E$  zien we dat  $EB = -EA$ , zodat de elasticiteit in dit punt gelijk is aan  $-1$ . In punten links boven  $E$  (op het lijnstuk  $AE$ , zoals het punt  $F$ ) zien we dat de afstand tussen deze punten en  $A$  kleiner is in absolute waarde dan de afstand tussen dit punt en  $B$ . Bijgevolg is de elasticiteit op dit lijnstuk tussen  $0$  en  $-1$ . Daarom zegt men dat de waarden van  $X$  die hiermee overeenkomen liggen in de “inelastische zone”. In punten rechts onder  $E$  (op het lijnstuk  $EB$ , zoals het punt  $G$ ) zien we dat de afstand tussen deze punten en  $A$  groter is in absolute waarde dan de afstand



Figuur 1.11: Grafische afleiding elasticiteit linear dalende functie



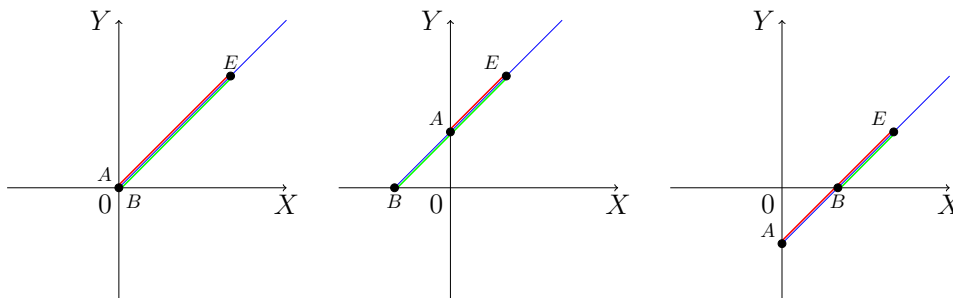
tussen deze punten en  $B$ . Bijgevolg is de elasticiteit op dit lijnstuk kleiner dan  $-1$ . Daarom zegt men dat de waarden van  $X$  die hiermee overeenkomen liggen in de “elastische zone”. Figuur 1.12 beschouwt linear stijgende functies.

Figuur 1.12: Elasticiteit linear stijgende functies

(a)  $\epsilon_X^Y = 1$

(b)  $0 < \epsilon_X^Y < 1$

(c)  $\epsilon_X^Y > 1$

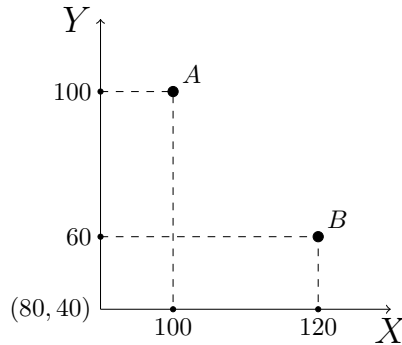


De elasticiteit is nog steeds gelijk aan  $\frac{EA}{EB}$ . In figuur 1.12a zien we dat de afstand  $EA$  gelijk is aan de afstand  $EB$ . Dit geldt voor elk punt op de blauwe rechte. Bijgevolg is de elasticiteit in elk punt op een rechte door de oorsprong gelijk aan 1. In figuur 1.12b zien we dat de afstand  $EA$  kleiner is dan de afstand  $EB$ . Dit geldt voor elk punt op de blauwe rechte. Bijgevolg is de elasticiteit in elke punt op een rechte met een positief intercept op de  $Y$ -as kleiner dan 1. In figuur 1.12c geldt het omgekeerde: de afstand  $EA$  is groter dan de afstand  $EB$ . Bijgevolg is de elasticiteit in elk punt op een rechte met een negatief intercept op de  $Y$ -as groter dan 1.

### 1.3.5 Discrete observaties: boogelasticiteit

Soms bestaat er een economische relatie  $Y(X)$  tussen de variabelen  $X$  en  $Y$ , maar worden slechts 2 punten van deze relatie geobserveerd: de punten  $A = (X^A, Y^A)$  en  $B = (X^B, Y^B)$ . Figuur 1.13 stelt die twee punten grafisch voor.

Figuur 1.13: Boogelasticiteit twee observaties



Als we de elasticiteit van de onbekende relatie tussen  $X$  en  $Y$  willen inschatten, kunnen we al dan niet een veronderstelling maken over de relatie tussen  $X$  en  $Y$ .

Indien we geen veronderstelling maken over de relatie tussen  $X$  en  $Y$ , dan kunnen we gebruik maken van de definitie van de boogelasticiteit:

$$e_X^Y(A) = \frac{Y^B - Y^A}{X^B - X^A} \frac{X^A}{Y^A} \text{ en } e_X^Y(B) = \frac{Y^A - Y^B}{X^A - X^B} \frac{X^B}{Y^B}$$

om de elasticiteit te berekenen in de punten A en B. We berekenen eerst de boogelasticiteit in het punt A wanneer we van A naar B gaan. We krijgen dan  $Y^B - Y^A = 60 - 100 = -40$  en  $X^B - X^A = 120 - 100 = 20$ , zodat  $e_X^Y(A) = \frac{-40}{20} \frac{100}{100} = -2$ . Vervolgens berekenen we de boogelasticiteit in het punt B wanneer we van B naar A gaan. We krijgen dan  $Y^A - Y^B = 100 - 60 = 40$  en  $X^A - X^B = 100 - 120 = -20$ , zodat  $e_X^Y(B) = \frac{40}{-20} \frac{120}{60} = -4$ . Dit levert twee verschillende waarden op. Meestal berekent men daarom een compromis door de volgende vuistregel toe te passen:

$$e_X^Y = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \frac{\frac{1}{2}[X^A + X^B]}{\frac{1}{2}[Y^A + Y^B]},$$

wat in ons voorbeeld geeft dat  $e_X^Y = -\frac{40}{20} \frac{\frac{1}{2}[100+120]}{\frac{1}{2}[100+60]} = -2.75$ . Een benaderende formule voor de boogelasticiteit die equivalent is met de vuistregel (compromis) is

$$e = \frac{Y^A - Y^B}{X^A - X^B} \frac{X^A + X^B}{Y^A + Y^B}.$$

Toegepast op het voorbeeld geeft dit inderdaad  $e = \frac{100-60}{100-120} \frac{100+120}{100+60} = -2.75$ .

Het alternatief is om een verband op te leggen tussen  $X$  en  $Y$ . Meestal wordt verondersteld dat het verband iso-elastisch is. Om de elasticiteit te berekenen in de punten  $A$  en  $B$  wordt gebruik gemaakt van de formules

$$e_X^Y(A) = \frac{\ln(Y^B) - \ln(Y^A)}{\ln(X^B) - \ln(X^A)} \text{ en } e_X^Y(B) = \frac{\ln(Y^A) - \ln(Y^B)}{\ln(X^A) - \ln(X^B)}.$$

Toegepast op het voorbeeld in het punt  $A$  wanneer we van  $A$  naar  $B$  gaan krijgen we  $\ln(Y^B) - \ln(Y^A) = \ln(60) - \ln(100) = 4.0943 - 4.6052 = -0.5109$  en  $\ln(X^B) - \ln(X^A) = \ln(120) - \ln(100) = 4.7875 - 4.6052 = 0.1823$ , zodat  $e_X^Y(A) = \frac{-0.5109}{0.1823} = -2.8025$ . Gaan we van  $B$  naar  $A$  dan krijgen we  $\ln(Y^A) - \ln(Y^B) = \ln(100) - \ln(60) = 4.6052 - 4.0943 = 0.5109$  en  $\ln(X^A) - \ln(X^B) = \ln(100) - \ln(120) = 4.6052 - 4.7875 = -0.1823$ , zodat  $e_X^Y(B) = \frac{0.5109}{-0.1823} = -2.8025$ . Deze twee elasticiteiten zijn aan elkaar gelijk. Er is bijgevolg geen nood aan een compromis (of vuistregel).

### 1.3.6 Elasticiteit van een curve

De uitspraak dat een eerste curve elastischer is dan een tweede is zinvol indien men twee iso-elastische curven met elkaar vergelijkt, en de eerste een grotere elasticiteit heeft dan de tweede. Vaak doet men dergelijke uitspraak ook voor curven die niet iso-elastisch zijn. Dit is in het algemeen niet gerechtvaardigd omdat de elasticiteit van niet iso-elastische curven verschilt van punt tot punt. Figuur 1.14 illustreert dit.

De blauwe rechte in figuur 1.14a verloopt steiler dan de gestippelde blauwe rechte in figuur 1.14b. Voor eenzelfde daling in  $X$  (want  $X^A - X^B = X^{A'} - X^{B'}$ ) krijgen we in figuur 1.14a een grotere toename in  $Y$  dan in figuur 1.14b:  $Y^B - Y^A > Y^{B'} - Y^{A'}$ . Hieruit trekt men soms de conclusie dat de blauwe rechte elastischer is dan de gestippelde blauwe rechte. Deze conclusie is echter fout. We zien in figuur 1.14c dat de afstand tussen  $B$  en  $C$  een derde is van de afstand tussen  $B$  en  $D$ , zodat  $\varepsilon_X^Y(B) = -1/3$ . In figuur 1.14d is de afstand tussen  $A'$  en  $E$  het drievoud van de afstand tussen  $A'$  en  $F$ , zodat  $\varepsilon_X^Y(A') = -3$ .

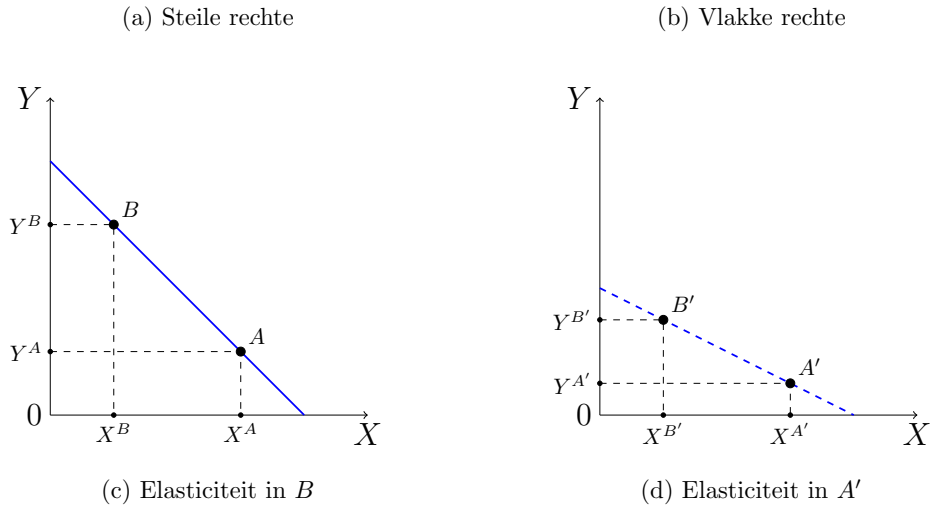
Wat wel zinvol is voor niet iso-elastische curven is de vergelijking van de elasticiteit in een gemeenschappelijk punt. In dat geval bepaalt de helling van de twee curven welke van beiden het meest elastisch is in het gemeenschappelijk punt. Figuur 1.15 illustreert.

De elasticiteit in het punt  $A$  wordt gelijk aan

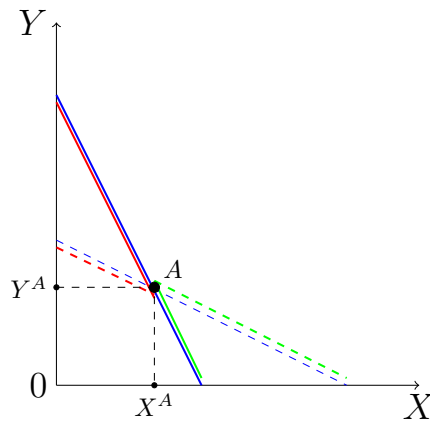
$$\varepsilon_X^Y(A) = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \frac{X^A}{Y^A}.$$

Aangezien we voor beide curven de elasticiteit in punt  $A$  beschouwen, verschilt de elasticiteit in het punt  $A$  uitsluitend doordat  $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$  voor beide curven anders is. De blauwe rechte is steiler dan de gestippelde blauwe rechte. Bijgevolg is de blauwe rechte elastischer in  $A$  dan de gestippelde blauwe rechte.

Figuur 1.14: Elasticiteit van een curve



Figuur 1.15: Elasticiteit van curve door een gemeenschappelijk punt



Deel I

**Consumentengedrag**



## Hoofdstuk 2

# Bouwstenen consumentengedrag

### 2.1 Inleiding

Consumenten beslissen welke goederen ze kopen. Zij beslissen of zij vanavond naar het theater gaan, of naar de film. Zij beslissen om op restaurant een pizza of een pasta te bestellen, om op vakantie te gaan naar Oostenrijk of Spanje. Voortdurend maken consumenten keuzen. De keuze van de consumenten bepaalt de vraag naar goederen en diensten. Die vraag naar goederen en diensten bepaalt samen met het aanbod van de producenten de prijs. In dit hoofdstuk en het volgende bestuderen we het traditionele kader dat economen gebruiken om de keuze van de consument te analyseren.

De keuze die een consument maakt hangt af van haar preferenties, inkomen en de prijzen van de goederen die beschikbaar zijn. In dit hoofdstuk bestuderen we elk van deze bouwstenen afzonderlijk. In het volgende hoofdstuk voegen we ze samen om inzicht te krijgen in de keuze die de consument maakt. Het derde hoofdstuk analyseert het elasticiteitsbegrip.

De beslissingsvariabele van de consument wordt gegeven door de vector

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathbb{R}_+^k,$$

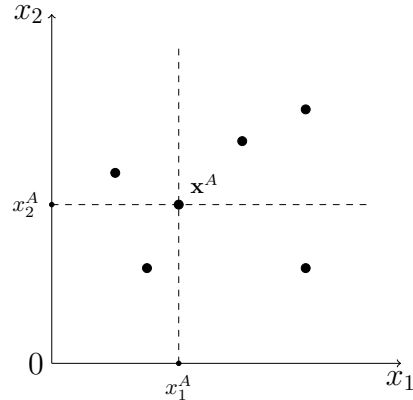
waarbij  $x_i \geq 0$  de endogene geconsumeerde hoeveelheid van goed  $i$  voorstelt. Indien  $k = 2$ , dan moet de consument een combinatie van  $x_1$  en  $x_2$  kiezen uit de twee-dimensionale ruimte  $\mathbb{R}_+^2$ . Deze ruimte wordt voorgesteld in figuur 2.1.

Elk punt op deze figuur stelt een combinatie van hoeveelheden van het eerste en tweede goed voor. Kiest de consument bijvoorbeeld het punt  $\mathbf{x}^A$ , dan heeft zij  $x_1^A$  eenheden van het eerste en  $x_2^A$  eenheden van het tweede goed. Indien zij een punt kiest rechtsboven  $\mathbf{x}^A$  dan heeft zij meer van beide goederen; linksonder  $\mathbf{x}^A$  heeft zij minder van beide goederen, rechtsonder heeft zij meer van  $x_1$  en minder van  $x_2$ , en linksboven heeft zij minder van  $x_1$  en meer van  $x_2$  dan in  $\mathbf{x}^A$ . Welke combinatie zij verkiest zal onder andere afhangen van haar preferenties.

De consument kan zich niet alle goederenbundels veroorloven. Haar keuze wordt beperkt door de middelen die zij heeft. Haar inkomen is het totale bedrag dat zij kan besteden. We houden in deze cursus dit inkomen exogeen en stellen dit voor door

$$Z \in \mathbb{R}_+,$$

Figuur 2.1: Consumptiebundels in 2 dimensies



zodat de consument een strikt positief inkomen heeft. Het micro-economisch kader kan uitgebreid worden om het inkomen endogeen te maken, door de arbeidsaanbodbeslissing (het aantal gewerkte uren) te incorporeren. Een andere uitbreiding modelleert de spaarbeslissing, waardoor vermogen wordt opgebouwd en in de toekomst hieruit interesten worden verkregen. Van dit alles maken we hier abstractie. Alle concepten en technieken die hier in het eenvoudige probleem gehanteerd en gebruikt worden komen terug in de meer complexe economische keuzemodellen.

De keuze van de consument wordt niet alleen bepaald door haar preferenties en haar inkomen, maar ook door de prijzen van de verschillende goederen. De prijs van de goederen wordt gegeven door een prijsvector

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\} \in \mathbb{R}_+^k,$$

waarbij  $p_i \geq 0$  de exogene prijs van goed  $i$  voorstelt. Indien een goed goedkoper wordt, dan verwachten we typisch (maar niet altijd) dat de consument meer van dat goed zal kopen.

## 2.2 Preferenties

### 2.2.1 Basisaxiomas en fundamenteel theorema

We veronderstellen dat de consument rationele preferenties (soms ook voorkeuren genoemd) heeft over de bundels  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$ . Deze preferenties worden weergegeven door de preferentierelatie  $\succeq$  die gedefinieerd is over  $\mathbb{R}_+^k$ , waarbij  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$  betekent dat  $\mathbf{x}$  ten minste even goed is als  $\mathbf{y}$ . De relatie definiëert een *totale orde* op  $\mathbb{R}_+^k$ : ze is volledig en transitief.

**Axioma 1** *Volledigheid:* De preferentierelatie  $\succeq$  is volledig als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k$ :

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \text{ of } \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}.$$

Bovenstaand axioma betekent dat de consument elke twee willekeurige consumptiebundels kan vergelijken. Situaties waarbij de consument zich niet kan uitspreken, situaties waarbij zij zegt “Ik weet niet of ik  $\mathbf{x}$  ten minste even goed vind als  $\mathbf{y}$  of omgekeerd” worden uitgesloten.



Als de preferentierelatie volledig is, dan impliceert dit dat de preferentierelatie reflexief is, dit wil zeggen dat elke bundel ten minste even goed is als zichzelf. Dit zien we door in het bovenstaand axioma  $\mathbf{y}$  gelijk te stellen aan  $\mathbf{x}$ , zodat voor een volledige preferentierelatie het moet waar zijn dat “ $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$ ”, of “ $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$ ”, en we dus hebben dat altijd “ $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$ ”.

Het volgende, cruciale axioma, is het transitiviteitsaxioma.

**Axioma 2** *Transitiviteit:* De preferentierelatie  $\succeq$  is transitief als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^k$  :

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \text{ en } \mathbf{y} \succeq \mathbf{z} \text{ impliceert } \mathbf{x} \succeq \mathbf{z}.$$

Het transitiviteitsaxioma komt neer op de eis dat het keuzegedrag consistent moet zijn. Het volgende gedachtenexperiment wordt beschouwd als een belangrijk argument voor transitiviteit van preferenties, waarbij twee personen, die we  $P_1$  en  $P_2$  noemen, betrokken zijn:

- $P_1$  heeft goederenbundel  $\mathbf{b}$ ,  $P_2$  heeft twee bundels,  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{c}$ .
- $P_1$  haar preferentierelatie is niet transitief:

$$\mathbf{a} \succ \mathbf{b} \text{ en } \mathbf{b} \succ \mathbf{c} \text{ maar } \mathbf{c} \succ \mathbf{a},$$

waarbij de notatie  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  uitdrukt dat  $P_1$  de vector  $\mathbf{x}$  stikt beter vindt dan de vector  $\mathbf{y}$ . Deze relatie is niet transitief, want transitiviteit impliceert dat indien  $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$  en  $\mathbf{b} \succ \mathbf{c}$  dan moet  $\mathbf{a} \succ \mathbf{c}$ , wat hier niet het geval is.

- Ruil 1:  $P_2$  stelt  $P_1$  voor om  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{b}$  te ruilen, als  $P_1$  haar 1 euro geeft. Omdat  $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$  aanvaardt  $P_1$  deze ruil.
- Ruil 2: Vervolgens stelt  $P_2$  aan  $P_1$  voor om  $\mathbf{c}$  en  $\mathbf{a}$  te ruilen, als  $P_1$  haar 1 euro geeft. Omdat  $\mathbf{c} \succ \mathbf{a}$  aanvaardt  $P_1$  deze ruil.
- Ruil 3: Tot slot stelt  $P_2$  aan  $P_1$  voor om  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{c}$  te ruilen, als  $P_1$  haar 1 euro geeft. Omdat  $\mathbf{b} \succ \mathbf{c}$  aanvaardt  $P_1$  deze ruil.
- We zijn terug in de uitgangssituatie. Alleen heeft  $P_2$  nu 3 euro meer en  $P_1$  heeft 3 euro minder, terwijl  $P_1$  elke ruil aanvaardde en dus er beter aan toe is dan in de uitgangssituatie. Dit is contradictorisch.

Observeer dat het ruilproces voortdurend herhaald kan worden:  $P_2$  kan opnieuw ruil 1, dan ruil 2, en ruil 3 voorstellen, waarna zij opnieuw ruil 1 voorstelt en zo verder. Persoon  $P_1$  gaat altijd akkoord met deze voorgestelde ruilen, alhoewel zij steeds armer wordt. Dit is niet aannemelijk. Dit argument tegen niet transitieve preferenties werd eerst gesuggereerd door F.P. Ramsey (1926), en later ontwikkeld door Davidson et al (1995). Het staat bekend als het *money-pump argument*.

Gegeven een preferentierelatie  $\succeq$  die een totale orde definieert op  $\mathbb{R}_+^k$ , kunnen we de strikte preferentierelatie  $\succ$  en de indifferentie relatie  $\sim$  formeel als volgt definiëren.

**Definitie 3** *Strikte preferentierelatie:*  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  betekent dat het niet is dat  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ .

De notatie  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  betekent dat goederenbundel  $\mathbf{x}$  strikt beter is dan goederenbundel  $\mathbf{y}$ . De consument verkiest goederenbundel  $\mathbf{x}$  boven goederenbundel  $\mathbf{y}$ .

**Definitie 4** *Indifferentie relatie:*  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  betekent dat  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$  en  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ .

De notatie  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  betekent dat goederenbundel  $\mathbf{x}$  precies even goed is als goederenbundel  $\mathbf{y}$ . De consument is dan indifferent tussen beide goederenbundels.

Gebruik makend van deze definities kunnen we, gegeven een preferentierelatie  $\succeq$  die een totale orde definieert op  $\mathbb{R}_+^k$  en een willekeurig gekozen goederenbundel  $\mathbf{x}^A$ , de volgende verzamelingen definiëren.

**Definitie 5** *Betere verzameling:*  $B(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{y} \succeq \mathbf{x}^A\}$ .

De betere verzameling  $B(\mathbf{x}^A)$  bevat alle goederenbundels die ten minste even goed zijn als goederenbundel  $\mathbf{x}^A$ .

**Definitie 6** *Slechtere verzameling:*  $S(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x}^A \succeq \mathbf{y}\}$ .

De slechtere verzameling  $S(\mathbf{x}^A)$  bevat alle goederenbundels die niet strikt beter zijn dan goederenbundel  $\mathbf{x}^A$ .

**Definitie 7** *Indifferentie verzameling:*  $I(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{y} \sim \mathbf{x}^A\}$ .

De indifferentieverzameling  $I(\mathbf{x}^A)$  bevat alle goederenbundels die precies even goed zijn als goederenbundel  $\mathbf{x}^A$ .

**Definitie 8** *Strikt betere verzameling:*  $B_S(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{y} \succ \mathbf{x}^A\}$ .

De strikt betere verzameling  $B_S(\mathbf{x}^A)$  bevat alle goederenbundels die strikt beter zijn dan goederenbundel  $\mathbf{x}^A$ .

**Definitie 9** *Strikt slechtere verzameling:*  $S_S(\mathbf{x}^A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x}^A \succ \mathbf{y}\}$ .

De strikt slechtere verzameling  $S_S(\mathbf{x}^A)$  bevat alle goederenbundels die strikt slechter zijn dan goederenbundel  $\mathbf{x}^A$ .

Er gelden een aantal logische relaties tussen deze verzamelingen. De betere verzameling  $B(\mathbf{x}^A)$  is de unie van  $B_S(\mathbf{x}^A)$  en  $I(\mathbf{x}^A)$ . De slechtere verzameling  $S(\mathbf{x}^A)$  is de unie van  $S_S(\mathbf{x}^A)$  en  $I(\mathbf{x}^A)$ . De indifferentieverzameling  $I(\mathbf{x}^A)$  is de doorsnede van  $B(\mathbf{x}^A)$  en  $S(\mathbf{x}^A)$ .

De volgende figuur geeft een grafische voorstelling van enkele van deze verzamelingen voor een bepaalde preferentierelatie die voldoet aan de axiomas van volledigheid en transitiviteit.

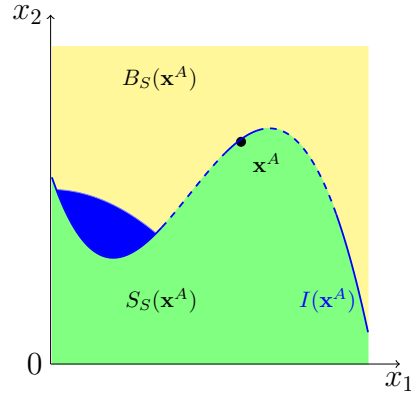
Het gekozen referentiepunt is  $\mathbf{x}^A$ . De gele verzameling is de strikt betere verzameling  $B_S(\mathbf{x}^A)$ ; de blauwe verzameling is de indifferentieverzameling  $I(\mathbf{x}^A)$  en de groene verzameling is de strikt slechtere verzameling  $S_S(\mathbf{x}^A)$ .

Deze verzamelingen zien er ietwat anders uit dan hoe zij meestal worden voorgesteld. De reden is dat economen vrijwel altijd bijkomende veronderstellingen opleggen aan de voorkeuren van de consument. Een bijkomende veronderstelling die vaak aan preferenties wordt opgelegd is continuïteit.

**Axioma 3** *Continuïteit:* De preferentierelatie  $\succeq$  is continu als en slechts als  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k :$

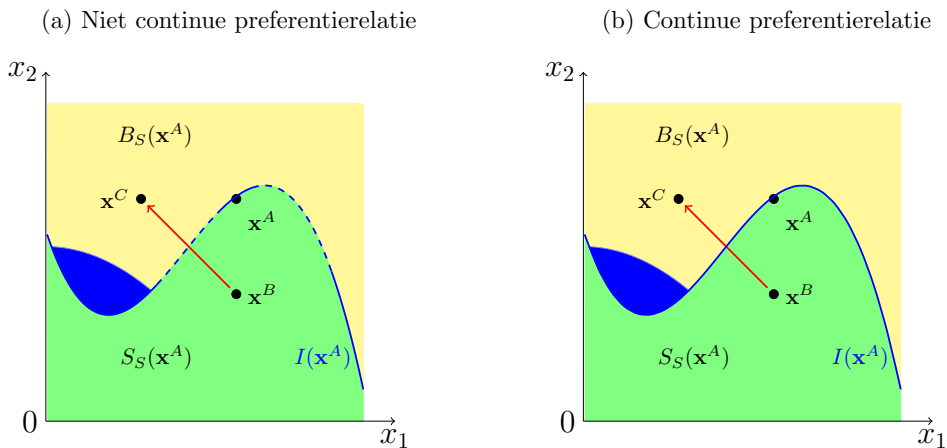
$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \right\} \text{ en } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \right\} \text{ gesloten verzamelingen zijn.}$$

Figuur 2.2: Preferenties die voldoen aan volledigheid en transitiviteit



Continuïteit betekent dat de overgang van de strikt slechtere naar de strikt betere verzameling verloopt via de indifferentie verzameling: we moeten, tijdens de overgang, passeren doorheen tenminste één punt dat behoort tot de indifferentie verzameling. We kunnen niet springen van de strikt slechtere naar de strikt betere verzameling. Dit is de intuïtieve idee van continuïteit: er vindt geen bruske overgang plaats van de strikt slechtere naar de strikt betere verzameling. Figuur 2.3 illustreert het verschil tussen een preferentierelatie die continu en die niet continu is. Beide preferentierelaties voldoen aan de twee andere axiomas (volledigheid en transitiviteit).

Figuur 2.3: Continuïteit van preferentierelaties



We begeven ons van goederenbundel  $\mathbf{x}^B$  naar  $\mathbf{x}^C$ , de rode pijl volgend. In het linkerpaneel zien we dat we vanuit de groene verzameling,  $S_S(\mathbf{x}^A)$ , rechtstreeks toegang hebben tot de gele verzameling,  $B_S(\mathbf{x}^A)$ . In het rechterpaneel moeten we eerst door de blauwe indifferentie verzameling,  $I(\mathbf{x}^A)$ , passeren. Bijgevolg is de preferentierelatie in het rechterpaneel continu, maar deze in het linkerpaneel niet.

De meeste preferentierelaties die in de economie worden gebruikt zijn continu. Een preferentierelatie die regelmatig voorkomt en die niet continu is, is de lexicografische prefe-

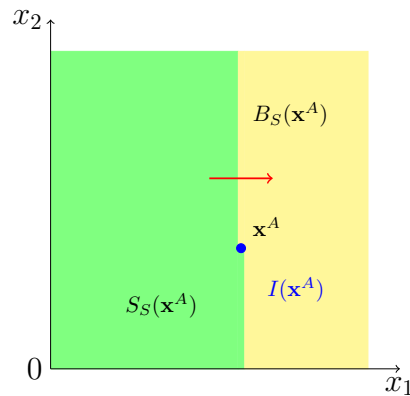
rentierelatie. Indien  $k = 2$ , dan wordt deze als volgt gedefiniëerd.

**Definitie 10** *Lexicografisch preferentierelatie:*

$$\mathbf{x}^A \succ_{Lex} \mathbf{x}^B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^A > x_1^B \\ \text{of} \\ x_1^A = x_1^B \text{ en } x_2^A > x_2^B. \end{cases}$$

In het geval van 2 goederen is, voor de lexicografische preferentierelatie een goederenbundel  $\mathbf{x}^A$  strikt beter dan een goederenbundel  $\mathbf{x}^B$  als en slechts als (i)  $\mathbf{x}^A$  meer heeft van het eerste goed dan  $\mathbf{x}^B$ , of (ii) indien beide bundels evenveel van het eerste goed hebben, dan biedt  $\mathbf{x}^A$  strikt meer van het tweede goed dan  $\mathbf{x}^B$ . De volgende figuur geeft, voor een lexicografische preferentierelatie en een bepaald punt  $\mathbf{x}^A$ , de verzamelingen  $B_S(\mathbf{x}^A)$ ,  $I(\mathbf{x}^A)$  en  $S_S(\mathbf{x}^A)$ .

Figuur 2.4: Lexicografische preferentierelatie



De punten horizontaal onder het referentiepunt  $\mathbf{x}^A$  behoren tot de groene verzameling  $S_S(\mathbf{x}^A)$ , want in deze punten heeft de consument evenveel van  $x_1$  als in  $\mathbf{x}^A$  en minder van  $x_2$ . De punten horizontaal boven het referentiepunt behoren tot de gele verzameling,  $B_S(\mathbf{x}^A)$  want in deze punten heeft de consument evenveel van  $x_1$  als in  $\mathbf{x}^A$  en meer van  $x_2$ . De indifferentie verzameling  $I(\mathbf{x}^A)$  bevat uitsluitend het referentiepunt. Begeven we ons horizontaal van de groene naar de gele verzameling de horizontale rode pijl volgend, dan passeren we niet via de indifferentie verzameling. Bijgevolg is deze preferentierelatie niet continu.

Als de preferentierelatie  $\succeq$  continu is, dan zijn  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}\}$  en  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \preceq \mathbf{y}\}$  gesloten verzamelingen. Bijgevolg is

- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \sim \mathbf{y}\}$  een gesloten verzameling,
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}$  een open verzameling,
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \prec \mathbf{y}\}$  een open verzameling.

Continuïteit is een hele krachtige eigenschap: als continuïteit wordt toegevoegd aan volledigheid en transitiviteit dan verkrijgen we het volgende, fundamentele theorema.

**Theorema 5** *Fundamenteel theorema: bestaan van nutsfuncties: Als een preferentierelatie  $\succeq$  volledig, transitief en continu is, dan bestaat er een continue nutsfunctie die deze preferentierelatie weerspiegelt, dit wil zeggen: er bestaat een functie  $u$ ,*

$$u : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y}).$$

Er bestaan, voor elke preferentierelatie, oneindig veel nutsfuncties die de preferentierelatie weerspiegelen. De nutsfunctie is *ordinaal*: ze dient alleen om alternatieven te ordenen, het verschil in de nutswaarden van de alternatieven heeft geen enkele betekenis. Het enige dat telt is of de waarde van het ene alternatief hoger of lager is dan de waarde van het andere alternatief. Om dit fenomeen formeel te beschrijven moet eerst het begrip monotone transformatie geïntroduceerd worden.

**Definitie 11** *Monotone transformatie: De functie  $h : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R} : h(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$  is een monotone transformatie van de functie  $u : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$  op voorwaarde dat de functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strikt stijgend is, wat wil zeggen dat  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$ .*

**Theorema 6** *Ordinaliteit van nutsfuncties: Als de functie  $u : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$  de preferentierelatie  $\succeq$  weerspiegelt, dan zal elke monotone transformatie van  $u$  dezelfde preferentierelatie weerspiegelen.*

**Bewijs.** Indien de functie  $u(\cdot)$  de preferentierelatie  $\succeq$  weerspiegelt, dan geldt dat  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  als en slechts als  $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ . Gegeven  $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$  geldt voor elke monotone transformatie  $h(\cdot)$  dat  $h(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x})) > h(\mathbf{y}) = f(u(\mathbf{y}))$  omdat  $f(\cdot)$  een strikt stijgende functie is. Bijgevolg weerspiegelt de functie  $h(\cdot)$  eveneens de preferentierelatie  $\succeq$ . ■

Dankzij het fundamentele theorema kunnen we de beste goederenbundel die een consument kan bereiken vinden door, rekening houdend met de beperkingen waarmee zij geconfronteerd wordt, een nutsfunctie te maximaleren die haar preferentierelatie weerspiegelt. Bijgevolg kunnen we, als een nutsfunctie van de consument gekend is, de beste bundel vinden door standaard optimaliseringstechnieken onder nevenvoorwaarden (Lagrange technieken). Het maakt niet uit welke nutsfunctie gebruikt wordt in de optimalisering, zolang die de preferentieordering maar weerspiegelt.

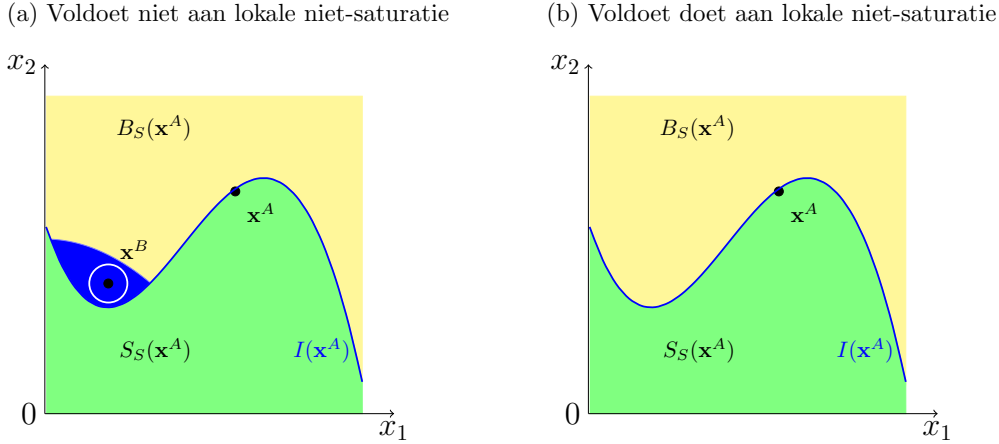
### 2.2.2 Monotonicitaxioma's

Meestal wordt aan preferenties opgelegd dat meer van de consumptiegoederen beter is. Er bestaan 3 klassieke manieren waarop die intuïtie wordt geformuleerd. We beginnen met de zwakste manier.

**Axioma 4** *Lokale niet-saturatie: De preferentierelatie  $\succeq$  voldoet aan lokale niet-saturatie als en slechts als  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$  en  $\forall \epsilon > 0 : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k$  met  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon : \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ .*

In dit axioma betekent  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon$  dat de afstand tussen de bundels  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{y}$  niet groter mag zijn dan  $\epsilon$ . Bijgevolg wordt opgelegd dat, in de buurt van elke goederenbundel, het mogelijk is om een andere bundel te vinden die strikt beter is. De volgende figuur illustreert het verschil tussen een preferentierelatie die voldoet aan lokale niet-saturatie en een preferentierelatie die hier niet aan voldoet. Beide preferentierelaties voldoen aan volledigheid, transitiviteit en continuïteit.

Figuur 2.5: Lokale niet-saturatie van preferentierelaties



In het linkerpaneel bepaalt de witte cirkel rond het punt  $\mathbf{x}^B$  een omgeving rond dit punt; er bestaat een  $\epsilon$  zodat alle punten in deze cirkel liggen op een afstand kleiner dan  $\epsilon$  van  $\mathbf{x}^B$ . Alle punten in deze omgeving liggen in de indifferëntieverzameling  $I(\mathbf{x}^A)$ . Er is geen enkel punt in de witte cirkel dat strikt beter is dan  $\mathbf{x}^A$ . Bijgevolg voldoet de preferentierelatie niet aan lokale niet-saturatie. In het rechterpaneel kan rond om het even welk punt een omgeving gevonden worden waarin een punt ligt dat strikt beter is dan het desbetreffende punt. Bijgevolg voldoet de preferentierelatie aan lokale niet-saturatie. Dikke indifferëntieverzamelingen worden uitgesloten indien de voorkeursordering voldoet aan lokale niet-saturatie. Indien een preferentierelatie voldoet aan lokale niet-saturatie dan is de indifferëntieverzameling een curve, de indifferëntiecurve. Een curve is gelijkaardig aan een lijn, maar hoeft geen rechte te zijn. Intuïtief kan een curve gezien worden als het spoor dat ontstaat indien je een punt beweegt. De formele definitie van een indifferëntiecurve in het geval met 2 goederen ( $k = 2$ ) is als volgt.

**Definitie 12** *Indifferëntiecurve* : Gegeven een preferentierelatie die voldoet aan lokale niet-saturatie is de indifferëntiecurve die door een willekeurige goederenbundel  $\mathbf{x}^A$  gaat de impliciete curve

$$x_2(x_1, \mathbf{x}^A) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x_1, x_2(x_1, \mathbf{x}^A)) \sim \mathbf{x}^A.$$

De curve  $x_2(x_1, \mathbf{x}^A)$  geeft weer welke waarden van  $x_2$ , voor een gegeven waarde van  $x_1$ , even goed zijn als  $\mathbf{x}^A$ .

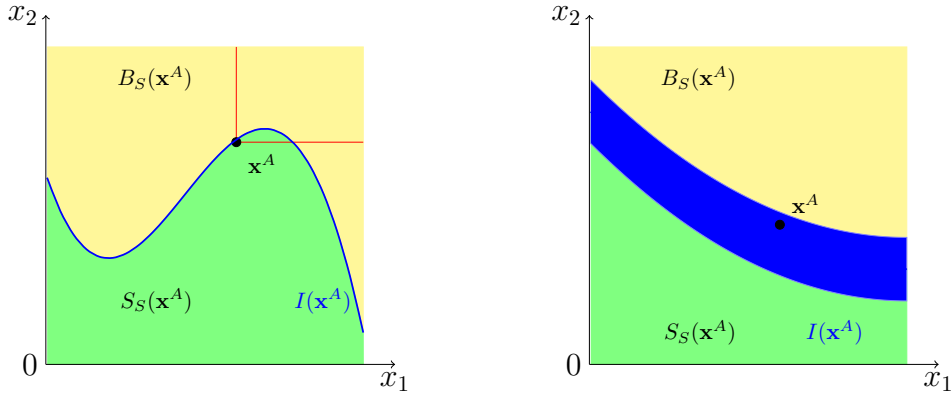
Een andere, niet lokale manier om uit te drukken dat meer consumptie beter is wordt gegeven door volgend axioma.

**Axioma 5** *Zwakke monotoniteit*: De preferentierelatie  $\succeq$  voldoet aan zwakke monotoniteit als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ .

In dit axioma betekent  $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$  dat de hoeveelheid van elk goed in goederenbundel  $\mathbf{x}$  ten minste even groot is als de hoeveelheid van dat goed in goederenbundel  $\mathbf{y}$ . Als dat het geval is, dan moet bundel  $\mathbf{x}$  ten minste even goed zijn als bundel  $\mathbf{y}$ .

Figuur 2.6: Lokale niet-saturatie en zwakke monotoniciteit van preferentierelaties

(a) Preferentierelatie die voldoet aan lokale niet-saturatie maar niet aan zwakke monotoniciteit (b) Preferentierelatie die voldoet aan zwakke monotoniciteit maar niet aan lokale niet-saturatie



Figuur 2.6a maakt duidelijk dat lokale niet-saturatie niet zwakke monotoniciteit impliceert, en figuur 2.6b dat zwakke monotoniciteit niet lokale niet-saturatie impliceert.

Vertrekkend vanuit om het even welke bundel vereist zwakke monotoniciteit dat alle bundels die rechtsboven deze bundel liggen ten minste even goed zijn als de bundel zelf. In het linkerpaneel zien we dat er bundels zijn die rechtsboven  $x^A$  én in de groene verzameling  $S_S(x^A)$  liggen, wat betekent dat ze strikt slechter zijn dan  $x^A$ . Bijgevolg voldoet deze preferentierelatie niet aan zwakke monotoniciteit. In het rechterpaneel kunnen we geen dergelijke bundel vinden; deze preferentierelatie is zwak monotoon. In het rechterpaneel zien we een dikke indifferetieverzameling. Bijgevolg voldoet deze niet aan lokale niet-saturatie. De preferentieverzameling in het linkerpaneel voldoet wel aan lokale niet-saturatie. Uit figuur 2.6a kunnen we bovendien afleiden dat, indien een preferentierelatie voldoet aan zwakke monotoniciteit en lokale niet-saturatie, haar indifferetiecurven niet-stijgend zijn.

De sterkste manier om uit te drukken dat meer consumptie beter is wordt gegeven door volgend axioma.

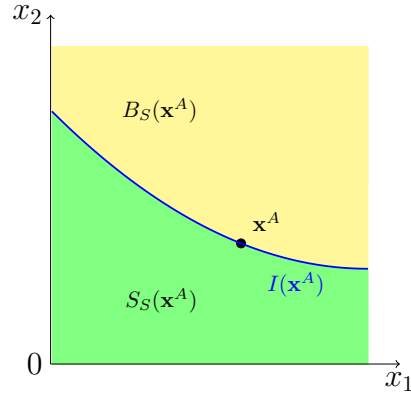
**Axioma 6** *Sterke monotoniciteit:* De preferentierelatie  $\succeq$  voldoet aan sterke monotoniciteit als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \geq \mathbf{y}$  en  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ .

Als elk element van een goederenbundel  $\mathbf{x}$  ten minste even groot is als het corresponderende element van een goederenbundel  $\mathbf{y}$  en ten minste één element is strikt groter, dan moet  $\mathbf{x}$  strikt beter zijn dan  $\mathbf{y}$ . Indien een preferentierelatie voldoet aan sterke monotoniciteit, dan moeten de indifferetiecurven geassocieerd met deze preferentierelatie een strikt dalend verloop hebben. De volgende figuur geeft een voorbeeld van een preferentierelatie die voldoet aan sterke monotoniciteit.

Rechtsboven om het even welke goederenbundel vinden we alleen bundels die strikt beter zijn dan deze bundel. Zo liggen, bijvoorbeeld, alle punten rechtsboven  $x^A$  in de gele verzameling  $B_S(x^A)$ .

We hebben reeds aangetoond dat de drie monotoniciteitsaxioma's verschillend zijn. Toch bestaan er volgende logische relaties tussen preferentierelaties die aan bepaalde axiomas voldoen:

Figuur 2.7: Een preferentierelatie die voldoet aan sterke monotoniciteit



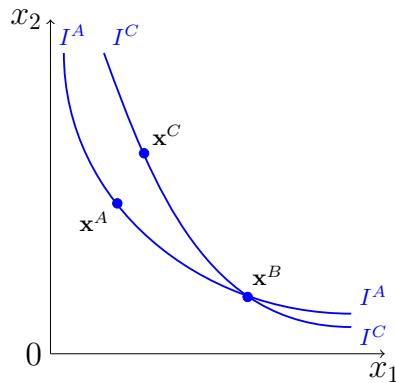
- als een preferentierelatie voldoet aan sterke monotoniciteit dan voldoet zij automatisch aan zwakke monotoniciteit.
- als een preferentierelatie voldoet aan sterke monotoniciteit dan voldoet zij automatisch aan lokale niet-saturatie.

Deze laatste eigenschap speelt een rol in het bewijs van volgend theorema.

**Theorema 7** *Niet-snijdende indifferentiecurven: Als de preferentierelatie  $\succeq$  volledig, transitief en continu is en voldoet aan sterke monotoniciteit, dan kunnen indifferentiecurven elkaar niet snijden.*

**Bewijs.** Sterke monotoniciteit impliceert lokale niet-saturatie. Lokale niet-saturatie sluit dikke indifferentieverzamelingen uit. Bijgevolg zijn de indifferentieverzamelingen van sterk monotone preferentierelaties curven. Sterke monotoniciteit impliceert bovendien dat deze curven strikt dalend verlopen. We bewijzen het theorema aan de hand van een bewijs uit het ongerijmde. Veronderstel dat de indifferentiecurven elkaar snijden, zoals in figuur 2.8.

Figuur 2.8: Snijdende indifferentiecurven





De indifferentiecurven doorheen  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^C$  snijden elkaar in het punt  $\mathbf{x}^B$ . Bijgevolg geldt  $\mathbf{x}^A \sim \mathbf{x}^B$  en  $\mathbf{x}^B \sim \mathbf{x}^C$ . Transitiviteit van de preferentierelatie impliceert dan dat  $\mathbf{x}^A \sim \mathbf{x}^C$ . We zien op de figuur echter dat goederenbundel  $\mathbf{x}^C$  strikt meer heeft van beide goederen dan bundel  $\mathbf{x}^A$ . Bijgevolg kan de preferentierelatie niet voldoen aan sterke monotoniciteit, want dit vereist dat  $\mathbf{x}^C \succ \mathbf{x}^A$ . ■

### 2.2.3 Convexiteitsaxioma's

Convexiteitsaxioma's worden vaak gebruikt om te garanderen dat de vraag van de consument (de gekozen combinatie uit de budgetverzameling), aantrekkelijke eigenschappen heeft. Zo zal blijken dat strikte convexiteit (zie verder) ervoor zorgt dat de optimale bundel voor de consument, gegeven zijn inkomen en de prijs van de goederen, uniek is.

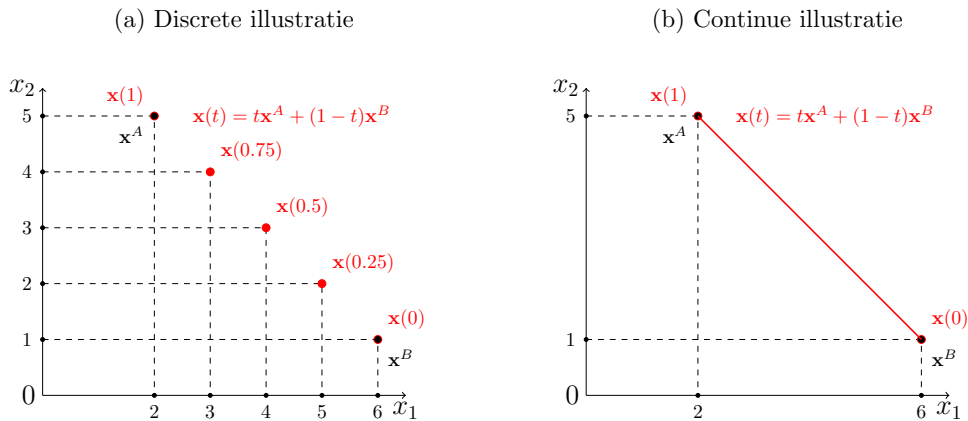
Om te begrijpen wat convexiteit inhoudt, is het nodig inzicht te hebben in de grafische interpretatie van het gewogen gemiddelde van twee goederenbundels  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$ .

**Definitie 13** *Gewogen gemiddelde van twee goederenbundels: Het gewogen gemiddelde van  $\mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B \in \mathbb{R}_+^k$ , met gewicht  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$  voor  $\mathbf{x}^A$  en  $1 - t$  voor  $\mathbf{x}^B$  is*

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{x}^A + [1 - t]\mathbf{x}^B.$$

Uiteraard is  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^k$ . De grafische interpretatie voor  $k = 2$  wordt gegeven in figuur 2.9 voor verschillende waarden van  $t$ .

Figuur 2.9: Gewogen gemiddelde



De punten  $\mathbf{x}^A = (2, 5)$  en  $\mathbf{x}^B = (6, 1)$  zijn aangeduid in het zwart in het linker- en het rechterpaneel van de figuur. In het linkerpaneel evalueren we de uitdrukking uit de definitie van het gewogen gemiddelde,  $\mathbf{x}(t) = t\mathbf{x}^A + [1 - t]\mathbf{x}^B$  voor vijf verschillende waarden van  $t$ , namelijk 0, 0.25, 0.5, 0.75 en 1. De corresponderende waarden voor  $\mathbf{x}(t)$  zijn in het rood aangeduid op de figuur. De punten liggen op een rechte die door de punten  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$  gaat. Hoe groter  $t$ , hoe dichter we bij  $\mathbf{x}^A$  uitkomen, hoe kleiner  $t$ , hoe dichter we bij  $\mathbf{x}^B$  uitkomen. Als we voor alle mogelijke waarden van  $t$  tussen 0 en 1 de waarde van  $\mathbf{x}(t)$  berekenen, bekomen we de rode rechte aangeduid op het rechterpaneel.

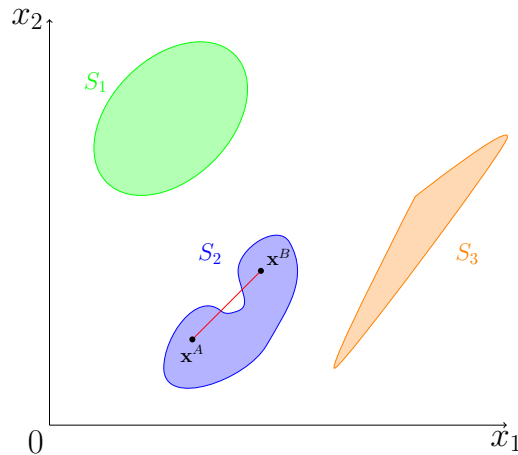
De volgende stap is de definitie van een convexe verzameling.

**Definitie 14** *Convexe verzameling:* Een verzameling  $S \subseteq \mathbb{R}_+^k$  is convex als en slechts als  $\forall \mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B \in S$  en  $0 \leq t \leq 1$ :

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{x}^A + [1 - t]\mathbf{x}^B \in S.$$

Een verzameling  $S$  is convex als en slechts als elk gewogen gemiddelde van 2 vectoren die tot  $S$  behoren zelf ook tot  $S$  behoort. Figuur 2.10 geeft voorbeelden van convexe en niet convexe verzamelingen in  $\mathbb{R}_+^2$ .

Figuur 2.10: Convexe en niet convexe verzamelingen



Verzameling  $S_1$  is convex: voor om het even welke 2 punten die tot  $S_1$  behoren, behoort om het even welk gewogen gemiddelde eveneens tot  $S_1$ . Hetzelfde is waar voor  $S_3$ . Verzameling  $S_2$  is niet convex: nemen we de punten  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$  aangeduid in de figuur, en verbinden we deze door een rechte (de rode rechte in de figuur), dan zien we dat er punten op deze rechte zijn die niet in  $S_2$  liggen. Dit betekent dat er gewogen gemiddelden van  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$  bestaan die niet tot  $S_2$  behoren. Bijgevolg is  $S_2$  niet convex.

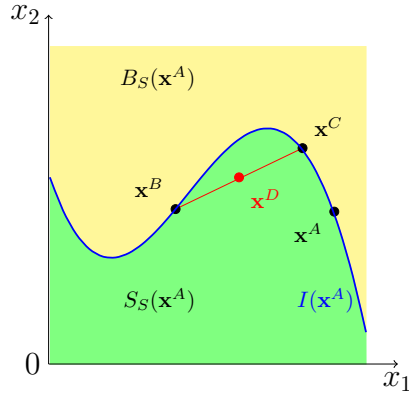
Nu we weten wat een convexe verzameling is, kunnen we convexiteit en strikte convexiteit van preferentierelaties definiëren.

**Definitie 15** *Convexe preferentierelatie:* De preferentierelatie  $\succeq$  is convex als en slechts als  $\forall \mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C \in \mathbb{R}_+^k$  zodanig dat  $\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C \in B(\mathbf{x}^A)$ , geldt  $k\mathbf{x}^B + [1 - k]\mathbf{x}^C \in B(\mathbf{x}^A) \forall 0 \leq k \leq 1$ .

Een preferentierelatie is convex als en slechts als voor elke willekeurige goederenbundel  $\mathbf{x}^A$  de betere verzameling  $B(\mathbf{x}^A)$  convex is. Voor elke willekeurige goederenbundel  $\mathbf{x}^A$  moet het dus zijn dat gewogen gemiddelden van twee goederenbundels die tot  $B(\mathbf{x}^A)$  behoren zelf eveneens tot  $B(\mathbf{x}^A)$  behoren. De volgende figuur geeft een voorbeeld van een preferentierelatie die niet convex is in  $\mathbb{R}_+^2$ .

De punten  $\mathbf{x}^B$  en  $\mathbf{x}^C$  behoren beiden tot  $I(\mathbf{x}^A)$  en dus tot  $B(\mathbf{x}^A)$ . Als we ze verbinden door een rechte (de rode rechte in de figuur), dan zien we dat er punten op deze rechte zijn die niet in  $B(\mathbf{x}^A)$  liggen, zoals het punt  $\mathbf{x}^D$ . Dit punt is een gewogen gemiddelde van  $\mathbf{x}^B$  en  $\mathbf{x}^C$  dat niet behoort tot  $B(\mathbf{x}^A)$ . Bijgevolg is de preferentierelatie niet convex.

Figuur 2.11: Niet convexe preferentierelatie

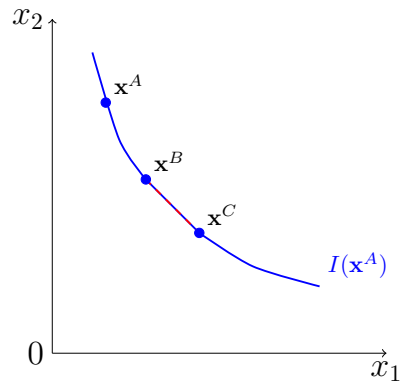
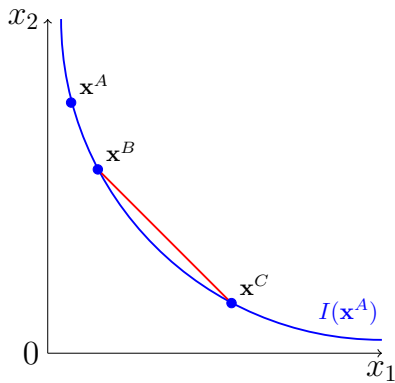


Als een preferentierelatie voldoet aan sterke monotoniciteit, dan ziet de indifferentieverzameling van convexe preferenties eruit zoals op figuur 2.12.

Figuur 2.12: Indifferentieverzameling bij convexe preferentierelatie

(a) Strikt convex

(b) Convex, niet strikt convex



We zien in het rechterpaneel van deze figuur dat de indifferentieverzameling van een convexe preferentierelatie lineaire segmenten kan hebben. Als we opleggen dat de preferentierelatie strikt convex is, dan wordt dit uitgesloten.

**Definitie 16** *Strikt convexe preferentierelatie:* De preferentierelatie  $\succeq$  is strikt convex als en slechts als  $\forall \mathbf{x}^A, \mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C \in \mathbb{R}_+^k$  zodanig dat  $\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^C \in B(\mathbf{x}^A)$ , geldt  $k\mathbf{x}^B + [1 - k]\mathbf{x}^C \in B_S(\mathbf{x}^A) \forall 0 < k < 1$ .

Een preferentierelatie is strikt convex als en slechts als voor elke willekeurige goederenbundel  $\mathbf{x}^A$  gewogen gemiddelden van twee goederenbundels die tot  $B(\mathbf{x}^A)$  behoren (met gewichten verschillend van 0 en 1 !) tot de *strikt* betere verzameling  $B_S(\mathbf{x}^A)$  behoren.

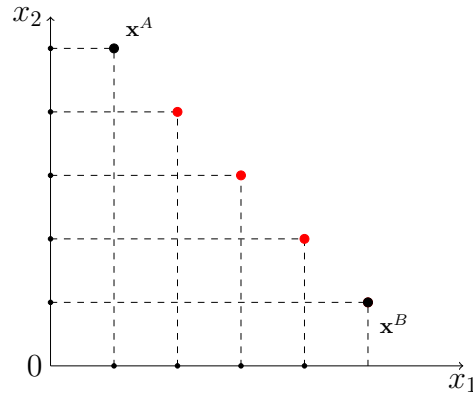
Merk op dat een preferentieverzameling die strikt convex is altijd convex is. Een preferentierelatie die convex is, is echter niet noodzakelijk strikt convex. De preferentierelatie

in figuur 2.12a is strikt convex, deze in figuur 2.12b is niet strikt convex. Door het lineaire segment op de indifferentiecurve tussen  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$  liggen gewogen gemiddelden van  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$  met gewichten verschillend van 0 en 1 op de indifferentiecurve, en behoren dus niet tot de strikt betere verzameling.

Convexiteit van de preferentierelatie wordt op twee manieren gemotiveerd.

De eerste manier is gebaseerd op het intuïtieve idee dat de consument minder extreme goederencombinaties verkiest boven extreme goederencombinaties. Indien preferenties voldoen aan (strikte) convexiteit en sterke monotoniciteit dan is dit inderdaad het geval.

Figuur 2.13: Convexiteit en extreme bundels



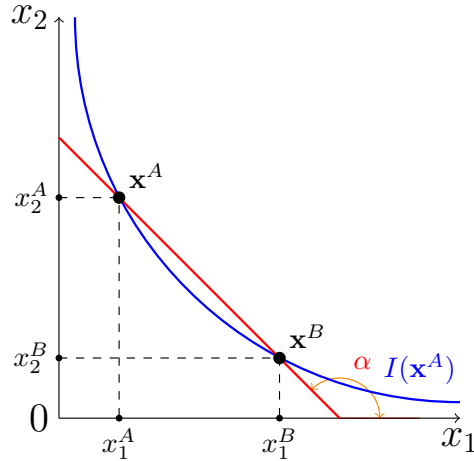
Veronderstel dat in figuur 2.13 de preferentierelatie van de consument zodanig is dat  $\mathbf{x}^A \sim \mathbf{x}^B$ : hij is indifferent tussen bundel  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$ . Dit zijn extreme bundels:  $\mathbf{x}^A$  bevat weinig van goed 1 en veel van goed 2, terwijl bundel  $\mathbf{x}^B$  veel van goed 1 en weinig van goed 2 bevat. De rode bundels in de figuur zijn minder extreem. Indien de preferentierelatie (strikt) convex en sterk monotoon is, dan zijn de rode bundels (strikt) beter dan  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$ .

De tweede manier om convexiteit van de preferentierelatie te motiveren is gebaseerd op het idee dat naarmate de consument meer heeft van een goed, haar bereidheid tot betalen voor een bijkomende eenheid van dit goed afneemt. We veronderstellen dat de indifferentiecurve  $x_2(x_1, \mathbf{x}^A)$  een afleidbare functie is. Ze geeft weer hoe  $x_2$  moet veranderen als  $x_1$  verandert om een bundel te krijgen die even goed is als  $\mathbf{x}^A$ .

Vervolgens definiëren we de substitutieverhouding. De substitutieverhouding geeft weer, vertrekkend vanuit de bundel  $\mathbf{x}^A$ , hoeveel eenheden van  $x_2$  de consument wil opgeven ten einde  $\Delta x_1$  eenheden meer te krijgen van  $x_1$ . Dit concept wordt geïllustreerd aan de hand van figuur 2.14.

Als we, vertrekkend vanuit het punt  $\mathbf{x}^A$  ons langsheen de blauwe indifferentiecurve begeven naar het punt  $\mathbf{x}^B$ , dan stijgt  $x_1$  en daalt  $x_2$ . De verandering in  $x_1$  is  $\Delta x_1 = x_1^B - x_1^A > 0$  en de corresponderende verandering in  $x_2$  is  $\Delta x_2 = x_2^B - x_2^A < 0$ . Aangezien  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$  op dezelfde indifferentiecurve liggen, betekent dit dat, vertrekkend vanuit het punt  $\mathbf{x}^A$ , de consument bereid is om  $|\Delta x_2|$  eenheden van  $x_2$  op te geven om  $\Delta x_1$  eenheden meer te krijgen van  $x_1$ . Hij is dus bereid, als hij de goederenbundel  $\mathbf{x}^A$  heeft, om  $|\Delta x_2|$  eenheden

Figuur 2.14: Substitutieverhouding



van  $x_2$  te betalen om  $\Delta x_1$  eenheden meer te krijgen van  $x_1$ . Dit wordt uitgedrukt door de substitutieverhouding,  $SV_{1,2}^{x^A}(\Delta x_2)$ : zij is gelijk aan het negatieve van de verandering in  $x_2$  ten opzichte van de verandering in  $x_1$ :

$$SV_{1,2}^{x^A}(\Delta x_1) = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{x_2^A - x_2^B}{x_1^B - x_1^A} = -\tan(\alpha),$$

waarbij  $\tan(\alpha)$  staat voor de tangens van de hoek  $\alpha$  aangeduid in de figuur.

De marginale substitutieverhouding is de substitutieverhouding waarbij de verandering in  $x_1$  naar nul gaat:

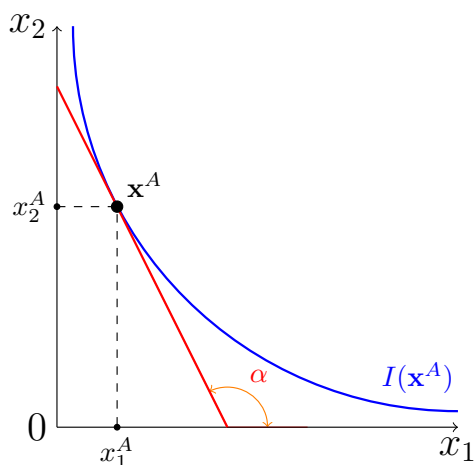
$$MSV_{1,2}^{x^A} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} SV_{1,2}^{x^A}(\Delta x_1) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1},$$

en geeft weer, vertrekkend vanuit de bundel  $\mathbf{x}^A$ , met hoeveel  $x_2$  moet veranderen indien  $x_1$  met een infinitesimale hoeveelheid verandert, en de consument een bundel krijgt die nog even goed is als  $\mathbf{x}^A$ . Bijgevolg geeft  $MSV_{1,2}^{x^A}$  de marginale bereidheid tot betalen voor  $x_1$  in termen van  $x_2$  weer als de consument de bundel  $\mathbf{x}^A$  heeft.

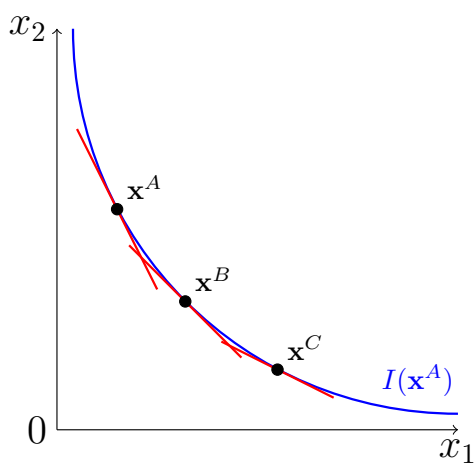
Als we in figuur 2.14 de verandering  $\Delta x_1$  verkleinen, dan verplaatst het punt  $\mathbf{x}^B$  zich langsheen de indifferentiecurve in de richting van  $\mathbf{x}^A$ , en zal de rode lijn die door  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$  gaat steiler worden (de corresponderende substitutievoet neemt toe). Wanneer  $\Delta x_1$  naar nul gaat, bekomen we de marginale substitutieverhouding als de absolute waarde van de helling van de rode lijn indien  $\mathbf{x}^B$  naar  $\mathbf{x}^A$  gaat. De volgende figuur toont dat deze gelijk is aan de absolute waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de indifferentiecurve door  $\mathbf{x}^A$ .

Tot slot leggen we het verband met strikte convexiteit van preferenties. Als de preferentierelatie strikt convex is, dan verlopen indifferentiecurven op de manier aangeduid in figuur 2.16.

Figuur 2.15: Marginale substitutieverhouding



Figuur 2.16: Dalende marginale substitutieverhouding



De drie bundels  $\mathbf{x}^A$ ,  $\mathbf{x}^B$ , en  $\mathbf{x}^C$  liggen allen op dezelfde blauwe indifferentiecurve. We zien dat de volgende relatie geldt tussen de marginale substitutievoeten in deze drie punten:

$$MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A} > MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^B} > MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^C} > 0.$$

Bijgevolg neemt de marginale substitutievoet af naarmate de consument meer eenheden van  $x_1$  heeft; de marginale bereidheid tot betalen voor het eerste goed in termen van het tweede goed neemt af naarmate de consument meer eenheden van het eerste goed heeft.

Merk nog op dat, aangezien de marginale substitutievoet gelijk is aan min de waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt, de volgende relatie geldt tussen de

waarde van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de indifferentiecurve door de drie punten in figuur 2.16:

$$\frac{\partial x_2(x_1, \mathbf{x}^A)}{\partial x_1} < \frac{\partial x_2(x_1, \mathbf{x}^B)}{\partial x_1} < \frac{\partial x_2(x_1, \mathbf{x}^C)}{\partial x_1} < 0.$$

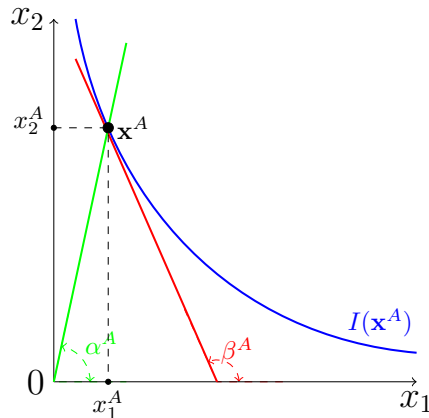
De eerste afgeleide van de indifferentiecurve met betrekking tot  $x_1$  neemt toe naarmate de hoeveelheid van  $x_1$  toeneemt. Bijgevolg moet de tweede afgeleide van de indifferentiecurve met betrekking tot  $x_1$  (die weergeeft in welke richting de eerste afgeleide verandert bij toenemende waarde van  $x_1$ ) positief zijn:

$$\frac{\partial^2 x_2(x_1, \mathbf{x}^A)}{(\partial x_1)^2} > 0.$$

#### 2.2.4 Indifferentiecurven en substitutie

De substitutie-elasticiteit karakteriseert de substitutieverhouding tussen twee goederen in een bepaald punt. Derhalve wordt zij bepaald door de vorm van de indifferentiecurve van de consument. Figuur 2.17 toont dat elk punt op een indifferentiecurve gekenmerkt wordt door twee verhoudingen.

Figuur 2.17: Kenmerken van een punt op de indifferentiecurve



Het punt  $\mathbf{x}^A$  wordt gekenmerkt door enerzijds de verhouding tussen de hoeveelheden van beide goederen in dat punt,

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \tan(\alpha^A),$$

en, anderzijds, de marginale substitutieverhouding (min de helling van de indifferentiecurve) in dat punt,

$$MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A} = -\frac{\partial x_2(x_1, \mathbf{x}^A)}{\partial x_1} = -\tan(\beta^A),$$

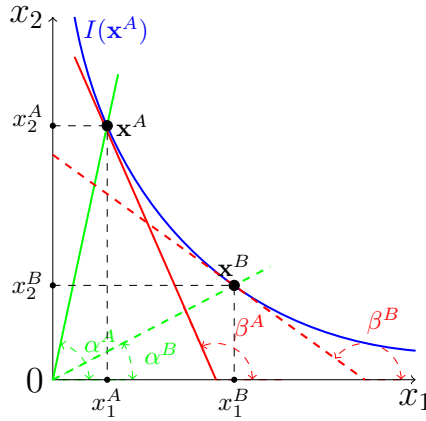
die de bereidheid tot betalen voor het eerste goed in termen van het tweede goed weergeeft.

De discrete substitutie-elasticiteit in een punt  $\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A)$  geeft de procentuele verandering in  $\frac{x_2}{x_1}$  ten gevolge van een procentuele verandering in de marginale substitutieverhouding langsheen de indifferentiecurve. Mathematisch:

$$e_S^{x_2^A/x_1^A}(\Delta MSV^A) = \frac{\frac{\Delta^*(x_2/x_1)}{(x_2^A/x_1^A)}}{\frac{\Delta MSV}{MSV^{\mathbf{x}^A}}},$$

waarbij  $\Delta MSV$  de verandering in de  $MSV$  is, en  $\Delta^*(x_2/x_1)$  de corresponderende verandering in de verhouding  $x_2/x_1$  langsheen de indifferentiecurve. Figuur 2.18 geeft een grafische interpretatie van deze discrete substitutie-elasticiteit.

Figuur 2.18: Discrete substitutie-elasticiteit



Toegepast op de figuur vinden we, als we ons begeven van  $\mathbf{x}^A$  naar  $\mathbf{x}^B$

$$e_S^{x_2^A/x_1^A}(\Delta MSV^A) = \frac{\frac{\Delta^*(x_2/x_1)}{(x_2^A/x_1^A)}}{\frac{\Delta MSV}{MSV^{\mathbf{x}^A}}} = \frac{\tan(\alpha^B) - \tan(\alpha^A)}{\tan(\alpha^A)} \cdot \frac{-\tan(\beta^B) + \tan(\beta^A)}{-\tan(\beta^A)}.$$

In de figuur neemt zowel de verhouding  $x_2/x_1$  als de marginale substitutieverhouding af, zodat de discrete substitutie-elasticiteit positief is. De discrete substitutie-elasticiteit kan herschreven worden als

$$e_S^{x_2^A/x_1^A}(\Delta MSV^A) = \frac{\Delta^*(x_2/x_1)}{\Delta MSV} \frac{MSV^{\mathbf{x}^A}}{(x_2^A/x_1^A)}.$$

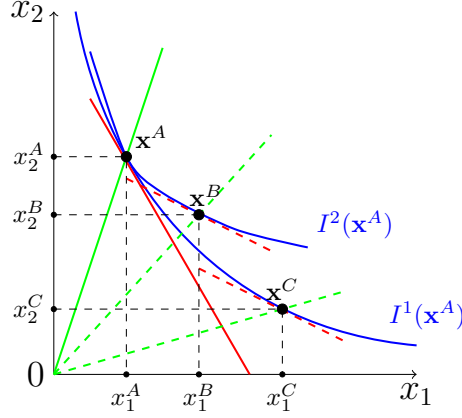
De klassieke definitie van de substitutie-elasticiteit laat vervolgens  $\Delta MSV$  oneindig klein worden:

$$\varepsilon_S^{x_2^A/x_1^A} = \lim_{\Delta MSV \rightarrow 0} e_S^{x_2/x_1}(\Delta MSV) = \frac{d^*(x_2/x_1)}{dMSV} \frac{MSV^{\mathbf{x}^A}}{(x_2^A/x_1^A)}.$$

Om de betekenis van de substitutie-elasticiteit beter te begrijpen, vergelijken we in figuur 2.19 twee indifferentiecurven die door hetzelfde punt gaan en bovendien in dat punt dezelfde  $MSV$  hebben.



Figuur 2.19: Betekenis substitutie-elasticiteit



Indifferentiecurven  $I^1(\mathbf{x}^A)$  en  $I^2(\mathbf{x}^A)$  gaan beiden door het punt  $\mathbf{x}^A$  en hebben dezelfde  $MSV$  in dat punt. Vervolgens verminderen we de  $MSV$  tot de helling van de rode stippe lijnen. Het raakpunt aan  $I^1(\mathbf{x}^A)$  wordt  $\mathbf{x}^C$ , het raakpunt met  $I^2(\mathbf{x}^A)$  wordt  $\mathbf{x}^B$ . We vergelijken de discrete substitutie-elasticiteit indien we van  $\mathbf{x}^A$  naar  $\mathbf{x}^B$  gaan op indifferentiecurve  $I^2(\mathbf{x}^A)$  met de discrete substitutie-elasticiteit indien we van  $\mathbf{x}^A$  naar  $\mathbf{x}^C$  gaan op indifferentiecurve  $I^1(\mathbf{x}^A)$ . We hebben

$$\begin{aligned}
 e_S^{x_2^A/x_1^A} (MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^B} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}) &< e_S^{x_2^A/x_1^A} (MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^C} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}) \\
 &\Downarrow \\
 \frac{\frac{x_2^B}{x_1^B} - \frac{x_2^A}{x_1^A}}{MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^B} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}} \frac{MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}}{\frac{x_2^A}{x_1^A}} &< \frac{\frac{x_2^C}{x_1^C} - \frac{x_2^A}{x_1^A}}{MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^C} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}} \frac{MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}}{\frac{x_2^A}{x_1^A}}.
 \end{aligned}$$

We vereenvoudigen deze uitdrukking door aan beide zijden van de ongelijkheid de positieve getallen  $\frac{x_2^A}{x_1^A}$  en  $MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}$  te schrappen, en bekomen dan de voorwaarde dat

$$\begin{aligned}
 e_S^{x_2^A/x_1^A} (MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^B} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}) &< e_S^{x_2^A/x_1^A} (MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^C} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}) \\
 &\Downarrow \\
 \frac{\frac{x_2^B}{x_1^B} - \frac{x_2^A}{x_1^A}}{MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^B} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}} &< \frac{\frac{x_2^C}{x_1^C} - \frac{x_2^A}{x_1^A}}{MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^C} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}}.
 \end{aligned}$$

Bovendien is de helling van de raaklijn aan  $I^2(\mathbf{x}^A)$  in  $\mathbf{x}^B$  gelijk aan de helling van de raaklijn aan  $I^1(\mathbf{x}^A)$  in  $\mathbf{x}^C$ , zodat  $MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^B} = MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^C}$ . Bijgevolg is  $MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^B} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A} = MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^C} - MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}$ , en omdat de  $MSV$  gedaald is, is dit verschil in marginale substitutie-

voeten negatief zodat

$$\begin{aligned}
 e_S^{x_2^A/x_1^A} (MSV_{1,2}^{x^B} - MSV_{1,2}^{x^A}) &< e_S^{x_2^A/x_1^A} (MSV_{1,2}^{x^C} - MSV_{1,2}^{x^A}) \\
 &\Downarrow \\
 \frac{x_2^B}{x_1^B} - \frac{x_2^A}{x_1^A} &> \frac{x_2^C}{x_1^C} - \frac{x_2^A}{x_1^A} \\
 &\Downarrow \\
 \frac{x_2^B}{x_1^B} &> \frac{x_2^C}{x_1^C},
 \end{aligned}$$

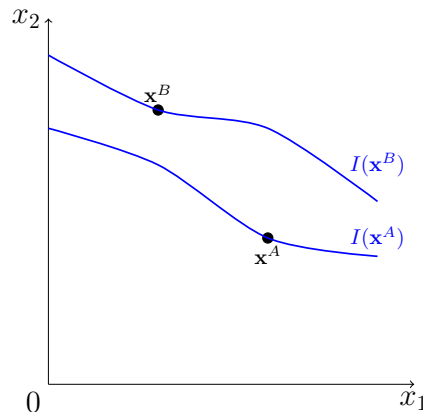
en we zien dat dit inderdaad het geval is. Bijgevolg is de substitutie-elasticiteit kleiner voor  $I^2(\mathbf{x}^A)$  dan voor  $I^1(\mathbf{x}^A)$ .

De indifferentiecurve met de grootste buiging in een bepaald punt - in figuur 2.19 is dit in het punt  $\mathbf{x}^A$  indifferentiecurve  $I^2(\mathbf{x}^A)$  - is dus degene met de kleinste substitutie-elasticiteit in dat punt.

### 2.2.5 Constructie van een nutsfunctie

We weten uit het fundamentele theorema, theorema 5, dat, als een preferentierelatie volledig, transitief en continu is, er een nutsfunctie bestaat die de preferentierelatie weerspiegelt. Voegen we sterke monotoniciteit toe als bijkomende eigenschap, dan wordt het eenvoudig om voor een preferentierelatie die deze eigenschappen heeft een nutsfunctie te construeren. De volgende twee figuren illustreren dit. Om de figuur niet te overladen geven we uitsluitend de indifferentiecurven weer: hoe hoger de indifferentiecurve waarop een consumptiebundel ligt, hoe beter de consument die goederenbundel vindt.

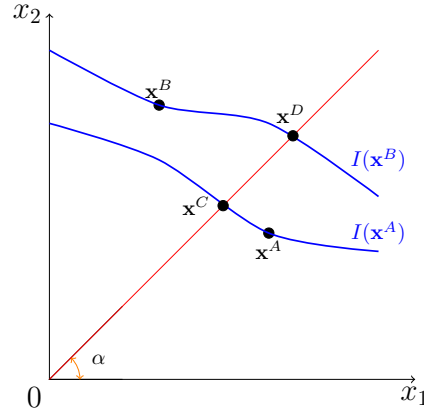
Figuur 2.20: Constructie van een nutsfunctie 1



Aangezien de indifferentiecurve  $I(\mathbf{x}^B)$  boven de indifferentiecurve  $I(\mathbf{x}^A)$  ligt verkiest de consument de bundel  $\mathbf{x}^B$  boven  $\mathbf{x}^A$ :  $\mathbf{x}^B \succ \mathbf{x}^A$ . Om een nutsfunctie te vinden die de preferentierelatie weerspiegelt gaan we als volgt te werk (zie ook figuur 2.21).

We nemen een voerstraal vanuit de oorsprong met een bepaalde hoek  $\alpha$ , weergegeven door de rode lijn op de figuur. Het nut van een goederenbundel definiëren we als de afstand

Figuur 2.21: Constructie van een nutsfunctie 2



vanuit de oorsprong tot het snijpunt van de voerstraal en de indifferentiecurve waarop die goederenbundel ligt. De bundel  $\mathbf{x}^C$  ligt op het snijpunt van de voerstraal en  $I(\mathbf{x}^A)$ . Het nut van  $\mathbf{x}^A$  is bijgevolg gelijk aan de afstand van de oorsprong tot  $\mathbf{x}^C$ . Gelijkaardig zien we dat de bundel  $\mathbf{x}^D$  ligt op het snijpunt van de voerstraal en  $I(\mathbf{x}^B)$ , zodat het nut van  $\mathbf{x}^B$  gelijk is aan de afstand van de oorsprong tot  $\mathbf{x}^D$ . Aangezien de afstand vanuit de oorsprong tot  $\mathbf{x}^D$  groter is dan de afstand vanuit de oorsprong tot  $\mathbf{x}^C$ , is de afstand die op deze manier bepaald wordt een nutsfunctie die de preferentierelatie weerspiegelt.

Het is duidelijk dat de nutsfunctie die we hebben opgesteld niet uniek is. Elke monotone transformatie (zie definitie 11) van de net bepaalde afstand weerspiegelt de preferentierelatie. We kunnen bijvoorbeeld de afstand kwadrateren, er de vierkantswortel of de logaritme van nemen, de afstand vermenigvuldigen met een positief getal, of een getal (positief of negatief) bij de afstand optellen. Bovendien hadden we om het even welke hoek  $\alpha$  kunnen nemen om de afstand te bepalen. Dit illustreert dat de nutsfunctie ordinaal is.

## 2.3 Nutsfuncties

Het fundamentele theorema, theorema 5 zegt dat, als een preferentierelatie volledig, transitief en continu is, er een nutsfunctie bestaat die de preferentierelatie weerspiegelt. In deze afdeling bespreken we eigenschappen van nutsfuncties, stellen we de nutsfunctie voor in een driedimensionele ruimte en geven enkele voorbeelden van vaak voorkomende nutsfuncties.

### 2.3.1 Eigenschappen van nutsfuncties

Het is eenvoudig om, indien de nutsfunctie bestaat, de eigenschappen van de preferentierelatie te vertalen naar eigenschappen van de nutsfunctie. We definiëren eerst de monotonicitaxioma's voor de nutsfunctie.

**Definitie 17** *Monotonicitaxiomas voor nutsfuncties :*

(a) Een nutsfunctie (en de onderliggende preferentierelatie) voldoet aan lokale niet-saturatie als en slechts als  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^k$  en  $\forall \epsilon > 0 : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k$  met  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \epsilon : u(\mathbf{y}) > u(\mathbf{x})$ .

(b) Een nutsfunctie (en de onderliggende preferentierelatie) is zwak monotoon als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Rightarrow u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$ .

(c) Een nutsfunctie (en de onderliggende preferentierelatie) is sterk monotoon als en slechts als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k : \mathbf{x} \geq \mathbf{y}$  en  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$ .

Een nutsfunctie voldoet aan lokale niet-saturatie als en slechts als in de buurt van om het even welke goederenbundel een andere goederenbundel kan gevonden worden waaraan de nutsfunctie een hogere waarde toekent. Een nutsfunctie is zwak monotoon als en slechts als ze aan goederenbundels die minstens even veel van elk goed bevatten als een andere goederenbundel steeds een waarde toekent die minstens even hoog is als de waarde toegekend aan die andere goederenbundel. Een nutsfunctie is sterk monotoon als en slechts als ze aan goederenbundels die minstens evenveel van elk goed en van ten minste één goed strikt meer bevatten dan een andere goederenbundel steeds een waarde toekent die strikt groter is dan de waarde die ze toekent aan die andere goederenbundel.

Vooraleer convexiteitsaxiomas te kunnen beschouwen, moeten eerst de begrippen concave en strikt concave functie gedefinieerd worden.

**Definitie 18** *Concave en strikt concave functie:*

(a) Een functie  $f : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$  is concaaf als,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k$  en voor elke  $t : 0 \leq t \leq 1$ :

$$f(t\mathbf{x} + [1 - t]\mathbf{y}) \geq tf(\mathbf{x}) + [1 - t]f(\mathbf{y}).$$

(b) De functie is strikt concaaf als  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^k$  en voor elke  $t : 0 < t < 1$ :

$$f(t\mathbf{x} + [1 - t]\mathbf{y}) > tf(\mathbf{x}) + [1 - t]f(\mathbf{y}).$$

Een functie is (strikt) concaaf als de functiewaarde van het gewogen gemiddelde van twee vectoren (strikt groter is dan) minstens even groot is als het gewogen gemiddelde van de functiewaarden van die vectoren, met gewichten tussen 0 en 1 (maar verschillend van 0 en 1 -zie definitie 13). Indien de nutsfunctie bestaat, dan is de onderliggende preferentierelatie (strikt) convex als en slechts als de nutsfunctie (strikt) concaaf is.

We kunnen de indifferenciecurve eveneens definiëren door gebruik te maken van de nutsfunctie. We doen dit voor het geval  $k = 2$ .

**Definitie 19** *Indifferenciecurve:* Gegeven een willekeurige goederenbundel  $\mathbf{x}^A$ , definiëren we de indifferenciecurve die door deze goederenbundel gaat als de impliciete curve

$$x_2(x_1, \mathbf{x}^A) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ : u(x_1, x_2(x_1, \mathbf{x}^A)) = u(\mathbf{x}^A).$$

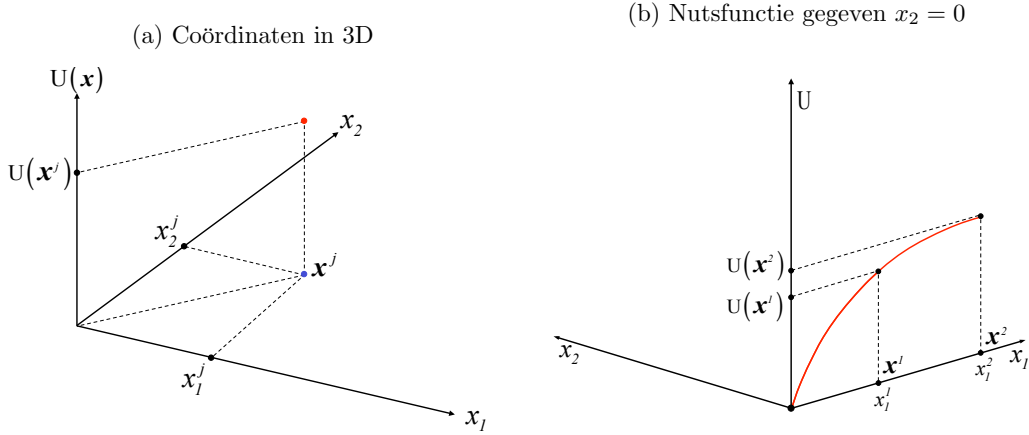
De indifferenciecurve curve  $x_2(x_1, \mathbf{x}^A)$  geeft weer welke waarden van  $x_2$ , voor een gegeven waarde van  $x_1$ , evenveel nut opleveren als goederenbundel  $\mathbf{x}^A$ . Deze definitie is volledig equivalent met definitie 12 gebaseerd op de indifferencierelatie.

### 2.3.2 Nutsfunctie in driedimensionele ruimte

We kunnen de nutsfunctie  $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  voorstellen in 3 dimensies, met  $x_1$ ,  $x_2$  en  $u(x_1, x_2)$  op de drie assen.

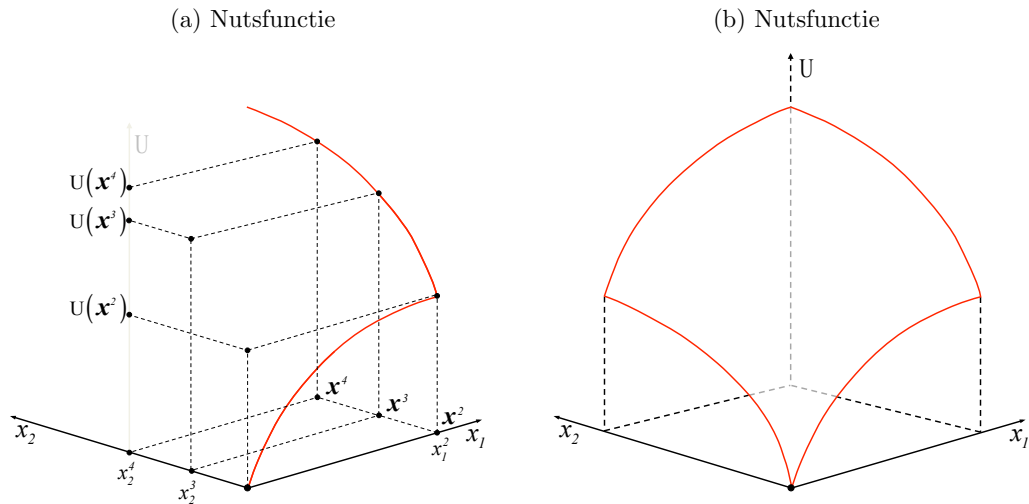
Figuur 2.22a toont wat de coördinaten van een punt in de driedimensionele ruimte betekenen. De goederenbundel  $\mathbf{x}^j$  bevat  $x_1^j$  eenheden van het eerste en  $x_2^j$  eenheden van het tweede goed. De verticale afstand tusen  $\mathbf{x}^j$  en het rode punt is de waarde die de

Figuur 2.22: Constructie nutsfunctie 3D, deel 1



nutsfunctie  $u$  toekent aan dit punt. Projecteren we het rode punt op de  $U(\mathbf{x})$ - as geeft de nutswaarde voor de goederenbundel  $\mathbf{x}^j$ . In figuur 2.22b vinden we de nutswaarde voor de bundels  $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, 0)$  en  $\mathbf{x}^2 = (x_1^2, 0)$ . In beide punten wordt niets van het tweede goed geconsumeerd. De rode lijn geeft de nutswaarde voor alle punten waar niets van het tweede goed wordt geconsumeerd en niet meer dan  $x_1^2$  van het eerste goed.

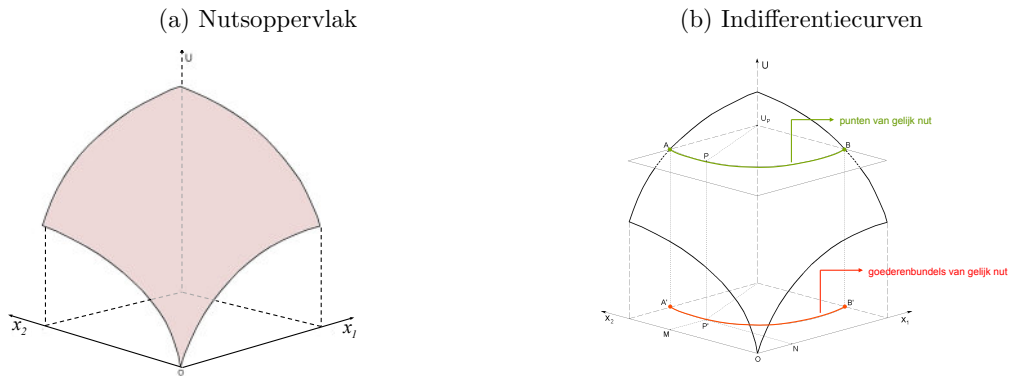
Figuur 2.23: Constructie nutsfunctie 3D, deel 2



Boven de  $x_1$ - as vinden we in figuur 2.23a de waarden van de nutsfunctie die we in figuur 2.22b hebben geconstrueerd. Als we de stippellijn volgen vanuit  $\mathbf{x}^2 = (x_1^2, 0)$  via  $\mathbf{x}^3$  naar  $\mathbf{x}^4$ , dan houden we de hoeveelheid van  $x_1$  constant en verhogen we de hoeveelheid van  $x_2$ . De rode lijn die we boven deze stippellijn vinden geeft weer wat gebeurt met het nut van de consument: zijn nut neemt toe naarmate we ons verder op de stippellijn begeven. Figuur 2.23a berekent de nutswaarden voor andere goederenbundels, waarbij we, vanuit het

hoogste punt van de rode lijn, als we ons naar linksonder begeven de hoeveelheid van  $x_1$  doen afnemen tot we in het punt terechtkomen waar  $x_1 = 0$ . Daarna laten we  $x_2$  afnemen tot we opnieuw in de oorsprong terecht komen, waar  $x_1 = x_2 = 0$ . Als we de nutswaarden berekenen voor alle mogelijke waarden van  $x_1$  en  $x_2$  dan bekomen we het nutsoppervlak, gegeven door de roze oppervlakte in figuur 2.24a.

Figuur 2.24: Constructie nutsfunctie 3D, deel 3



Éénmaal het nutsoppervlak gevonden, kunnen we dit nutsoppervlak doorsnijden voor een bepaalde nutswaarde. Dit doen we door de doorsnede te vinden van het nutsoppervlak met een horizontaal vlak, en levert die combinaties van  $x_1$  en  $x_2$  op waaraan de nutsfunctie dezelfde waarde toekent. Deze goederencombinaties liggen per definitie op een bepaalde indifferentiecurve. De procedure wordt geïllustreerd in figuur 2.24b. De groene curve geeft de doorsnede van het nutsoppervlak met een horizontaal vlak met een hoogte van  $U_p$ . Ze verbindt bijgevolg alle combinaties van  $x_1$  en  $x_2$  die de nutswaarde  $U_p$  opleveren. De waarden van  $x_1$  en  $x_2$  die met de groene curve overeenkomen vinden we door de punten van de curve te projecteren op het  $x_1 \times x_2$  vlak. Dit levert de rode curve op; deze curve is een indifferentiecurve.

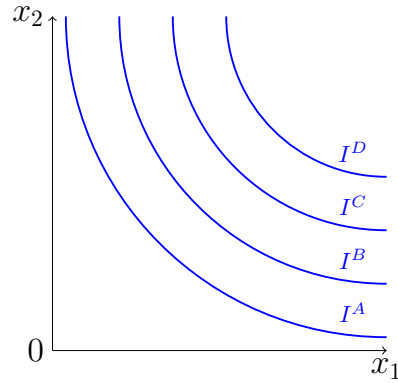
Naarmate we de doorsnede nemen voor een hogere waarde van het nut bekomen we een indifferentiecurve die verder van de oorsprong verwijderd is. De indifferentiekaart geeft indifferentiecurven die overeenkomen met een verschillend nutsniveau. Figuur 2.25 illustreert.

Een indifferentiekaart is bijgevolg zoals een hoogtekaart, waarbij (als de preferenties sterk monotoon zijn), een indifferentiecurve die verder van de oorsprong verwijderd is overeenkomt met een hoger nutsniveau. In figuur 2.25 is de nutswaarde die overeenkomt met indifferentiecurve  $I^A$  lager dan de nutswaarde die overeenkomt met indifferentiecurve  $I^B$ , die op haar beurt lager is dan de nutswaarde van  $I^C$ , die lager is dan de nutswaarde van  $I^D$ .

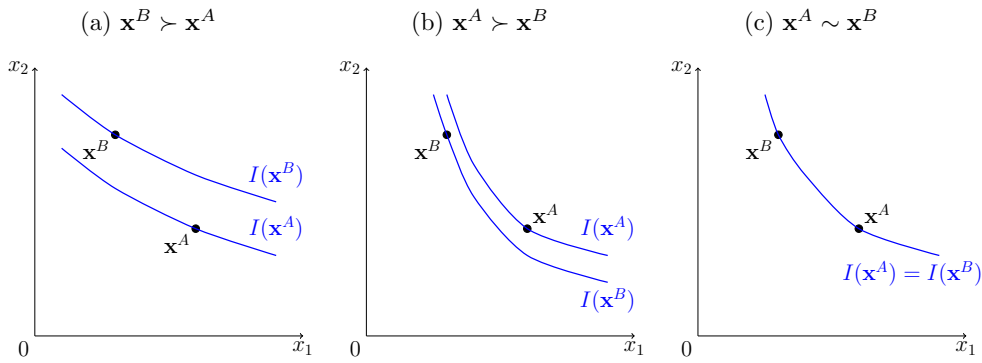
Bijgevolg kunnen we, indien preferenties voldoen aan sterke monotoniteit, aan de hand van de indifferentiekaart bepalen welke van 2 goederenbundels  $\mathbf{x}^A$  of  $\mathbf{x}^B$  het hoogste nut heeft. De volgende figuur geeft de 3 mogelijkheden.

In figuur 2.26a zien we dat  $\mathbf{x}^B$  op een hogere indifferentiecurve ligt dan  $\mathbf{x}^A$ . Bijgevolg verkiest de consument  $\mathbf{x}^B$  boven  $\mathbf{x}^A$ . In figuur 2.26b doet het omgekeerde zich voor en verkiest de consument  $\mathbf{x}^A$  boven  $\mathbf{x}^B$ . In figuur 2.26c liggen  $\mathbf{x}^B$  en  $\mathbf{x}^A$  op dezelfde indifferentiecurve. Bijgevolg is de consument indifferent tussen  $\mathbf{x}^B$  en  $\mathbf{x}^A$ .

Figuur 2.25: Indifferentiekaart



Figuur 2.26: Indifferentiekaart en voorkeur



### 2.3.3 Voorbeeld 1: Cobb Douglas nutsfunctie

De Cobb Douglas nutsfunctie (met 2 goederen) wordt gedefinieerd als de functie  $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$(2.1) \quad u(x_1, x_2) = a \cdot x_1^b \cdot x_2^c,$$

waarbij de parameters  $a, b, c > 0$ . We definiëren de indifferentiecurve die door een bepaald punt  $\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A)$  gaat impliciet als de functie  $x_2(x_1, \mathbf{x}^A) : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$u(\mathbf{x}^A) = ax_1^b [x_2(x_1, \mathbf{x}^A)]^c.$$

We kunnen deze vergelijking oplossen naar  $x_2(x_1, \mathbf{x}^A)$  om zo de expliciete uitdrukking voor de indifferentiecurve te vinden:

$$\begin{aligned} [u(\mathbf{x}^A)]^{\frac{1}{c}} &= \left[ ax_1^b \right]^{\frac{1}{c}} x_2(x_1, \mathbf{x}^A) \\ \Updownarrow & \\ x_2(x_1, \mathbf{x}^A) &= \left[ \frac{u(\mathbf{x}^A)}{ax_1^b} \right]^{\frac{1}{c}} = [u(\mathbf{x}^A)]^{\frac{1}{c}} a^{-\frac{1}{c}} x_1^{-\frac{b}{c}}. \end{aligned}$$

Om de marginale substitutieverhouding te vinden leiden we deze functie eerst af met betrekking tot  $x_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2(x_1, \mathbf{x}^A)}{\partial x_1} &= - [u(\mathbf{x}^A)]^{\frac{1}{c}} \cdot a^{-\frac{1}{c}} \cdot \frac{b}{c} \cdot x_1^{-\frac{b}{c}-1} \\ &= -\frac{b}{c} [u(\mathbf{x}^A)]^{\frac{1}{c}} a^{-\frac{1}{c}} x_1^{-\frac{b+c}{c}}.\end{aligned}$$

De marginale substitutieverhouding in het punt  $\mathbf{x}^A$  wordt gevonden door deze afgeleide van teken te veranderen en te evalueren in het punt,  $\mathbf{x}^A = (x_1^A, x_2^A)$ :

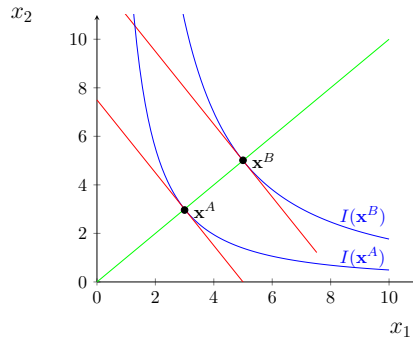
$$\begin{aligned}(2.2) \quad MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A} &= \frac{b}{c} [a(x_1^A)^b (x_2^A)^c]^{\frac{1}{c}} a^{-\frac{1}{c}} (x_1^A)^{-\frac{b+c}{c}} \\ &= \frac{b}{c} a^{\frac{1}{c}-\frac{1}{c}} (x_2^A)^{\frac{c}{c}} (x_1^A)^{\frac{b}{c}-\frac{b}{c}-\frac{c}{c}} \\ &= \frac{b x_2^A}{c x_1^A}.\end{aligned}$$

Bijgevolg is de marginale substitutieverhouding van de Cobb Douglas nutsfunctie gelijk aan een constante  $(b/c)$  vermenigvuldigd met de verhouding  $\frac{x_2^A}{x_1^A}$ . Ze heeft volgende eigenschappen:

- als  $x_2^A = x_1^A$ , dan is  $MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A} = \frac{b}{c}$ : op de 45 gradenlijn is de helling van de indifferentiecurve steeds gelijk aan  $b/c$ ;
- $\lim_{x_1^A \rightarrow 0} MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A} = \infty$ : als  $x_1^A$  heel klein wordt, dan wordt de helling van de indifferentiecurve oneindig, zodat de indifferentiecurve verticaal wordt;
- $\lim_{x_1^A \rightarrow \infty} MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A} = 0$ : als  $x_1^A$  heel groot wordt, dan wordt de helling van de indifferentiecurve nul, zodat de indifferentiecurve horizontaal wordt.

Figuur 2.27 geeft het verloop van de indifferentiecurve voor volgende waarden van de parameters van de Cobb Douglas nutsfunctie  $a = 1, b = 0.6$  en  $c = 0.4$ .

Figuur 2.27: Cobb Douglas indifferentiecurve



De punten  $\mathbf{x}^A$  en  $\mathbf{x}^B$  liggen op de groene lijn die een richtingscoëfficiënt heeft van 1 en dus de 45°-lijn voorstelt: op deze lijn geldt  $x_1 = x_2$ , zodat omwille van de eerste eigenschap



de marginale substitutieverhouding in zowel  $\mathbf{x}^A$  als in  $\mathbf{x}^B$  gelijk is aan  $\frac{b}{c} = \frac{0.6}{0.4} = \frac{3}{2}$ . De raaklijn aan de indifferentiecurven door deze punten wordt gegeven door de rode rechte en heeft bijgevolg een richtingscoëfficiënt van  $-\frac{3}{2}$ . De helling van beide indifferentiecurve,  $I(\mathbf{x}^A)$  en  $I(\mathbf{x}^B)$ , gaat naar min oneindig als  $x_1$  naar nul gaat en naar nul als  $x_1$  naar oneindig gaat.

Uit (2.2) volgt

$$\begin{aligned}\ln(MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}) &= \ln\left(\frac{b}{c}\right) + \ln\left(\frac{x_2^A}{x_1^A}\right) \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_2^A}{x_1^A}\right) &= \ln(MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A}) - \ln\left(\frac{b}{c}\right),\end{aligned}$$

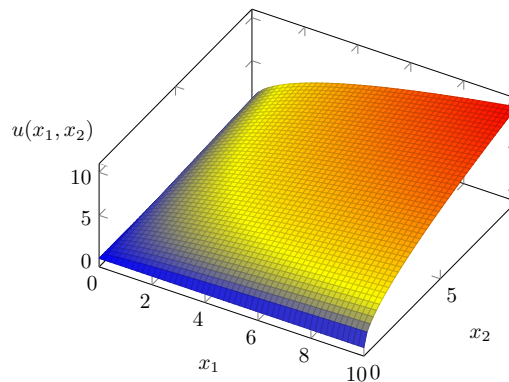
zodat de substitutie-elasticiteit

$$\varepsilon_S^{X_2^A/x_1^A} = \frac{\partial \ln\left(\frac{x_2^A}{x_1^A}\right)}{\partial \ln(MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A})} = 1.$$

Dit is een heel bijzondere eigenschap van Cobb-Douglas preferenties: de substitutie-elasticiteit is in alle punten precies gelijk aan één.

Figuur 2.28 geeft een driedimensionele voorstelling van de Cobb Douglas nutsfunctie, voor dezelfde parameterwaarden als in de vorige figuur. De nutswaarden staan op de verticale as. Wanneer het nutsoppervlak blauw kleurt hebben we een lage waarde voor het nut; geel komt overeen met een hogere waarde, en rood met de hoogste waarden. Voor een gegeven kleur (bijvoorbeeld zuiver geel), zien we duidelijk de vorm van de indifferentiecurven uit de vorige figuur.

Figuur 2.28: Cobb Douglas nutsfunctie in 3 D



### 2.3.4 Voorbeeld 2: Leontief nutsfunctie

De Leontief nutsfunctie (met 2 goederen) wordt gedefinieerd als de functie  $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  :

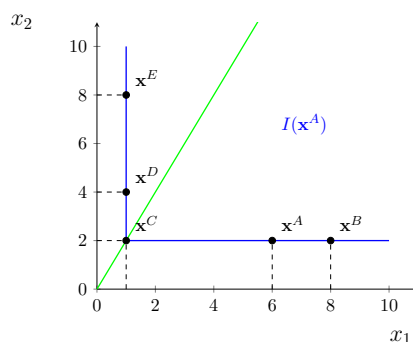
$$(2.3) \quad u(x_1, x_2) = \min \{ax_1, bx_2\},$$

waarbij  $a, b > 0$ . Het bereikte nutsniveau wordt gevonden als het kleinste element uit een verzameling met twee elementen:  $ax_1$  en  $bx_2$ . Deze nutsfunctie is niet afleidbaar, zodat we het impliciete functie theorema niet kunnen gebruiken om de helling van de indifferentiecurve te vinden.<sup>1</sup> We moeten dus op een andere manier te werk gaan als we willen zicht krijgen op de vorm van de indifferentiecurven geassocieerd met deze nutsfunctie.

We illustreren hoe de indifferentiecurve eruit ziet voor het geval in (2.3)  $a = 2$  en  $b = 1$  op de volgende figuur, dit wil zeggen voor de Leontief nutsfunctie:

$$(2.4) \quad u(x_1, x_2) = \min \{2 \cdot x_1, 1 \cdot x_2\}.$$

Figuur 2.29: Leontief indifferentie verzameling



We zoeken de indifferentie verzameling waartoe  $\mathbf{x}^A = (6, 2)$  behoort. Het nutsniveau dat hier wordt bereikt  $u(\mathbf{x}^A) = \min \{2 \cdot 6, 1 \cdot 2\} = \min \{12, 2\} = 2$ . Verhoog vervolgens de hoeveelheid van  $x_1$ , en hou de hoeveelheid van  $x_2$  constant, zoals in de bundel  $\mathbf{x}^B = (8, 2)$ . Het nutsniveau  $u(\mathbf{x}^B) = \min \{2 \cdot 8, 1 \cdot 2\} = 2$  en is gelijk aan  $u(\mathbf{x}^A)$ , zodat  $\mathbf{x}^B$  en  $\mathbf{x}^A$  tot dezelfde indifferentie verzameling behoren. Dit geldt voor alle bundels die horizontaal rechts van  $\mathbf{x}^A$  liggen. Vertrekkend vanuit  $\mathbf{x}^A$  verminderen we de hoeveelheid van  $x_1$  en houden de hoeveelheid van  $x_2$  constant, zoals in de bundel  $\mathbf{x}^C = (1, 2)$ . Het nutsniveau  $u(\mathbf{x}^C) = \min \{2 \cdot 1, 1 \cdot 2\} = 2$  en is gelijk aan  $u(\mathbf{x}^A)$ , zodat  $\mathbf{x}^C$  en  $\mathbf{x}^A$  eveneens tot dezelfde indifferentie verzameling behoren. Dit geldt voor alle punten die op de horizontale rechte tussen  $\mathbf{x}^C$  en  $\mathbf{x}^A$  liggen. Als we  $x_1$  nog verder zouden verminderen ( $x_1 < 1$  en  $x_2 = 2$ ), dan wordt het nutsniveau kleiner dan 2; de punten horizontaal links van  $\mathbf{x}^C$  behoren niet tot de indifferentie verzameling van  $\mathbf{x}^A$ . Hieruit volgt een eerste resultaat: alle punten met  $x_2 = 2$  en  $x_1 \geq 1$  behoren tot dezelfde indifferentie verzameling als  $\mathbf{x}^A$ .

Vertrekkend vanuit  $\mathbf{x}^C$  kunnen we  $x_2$  doen toenemen terwijl we  $x_1$  gelijk houden aan 1, zoals in de bundel  $\mathbf{x}^D$ . Voor deze bundel geldt  $u(\mathbf{x}^D) = \min \{2 \cdot 1, 1 \cdot 4\} = 2$ , zodat deze tot dezelfde indifferentie verzameling behoort als  $\mathbf{x}^C$ . Laten we  $x_2$  nog verder toenemen, zoals in de bundel  $\mathbf{x}^E$ , dan blijft het nut gelijk aan 2. Al de punten verticaal boven  $\mathbf{x}^C$  behoren tot dezelfde indifferentie verzameling als  $\mathbf{x}^C$ . Als we  $x_2 < 2$  kiezen ( $x_1 = 1$  houdend), wordt het nut kleiner dan 2. Hieruit volgt een tweede resultaat: alle punten met  $x_2 \geq 2$  en  $x_1 = 1$

<sup>1</sup>Het impliciete functietheorema zegt dat we, onder bepaalde voorwaarden, de afgeleide van een impliciet gedefinieerde functie met betrekking tot een variabele kunnen vinden door de identiteit die de functie impliciet definieert af te leiden met betrekking tot die variabele. Één van de voorwaarden is dat de identiteit die de functie definieert afleidbaar is, wat in het geval van de Leontief nutsfunctie niet het geval is.

behoren tot dezelfde indifferentie verzameling als  $\mathbf{x}^C$  en (omwille van transitiviteit van de indifferentie relatie) tot de indifferentie verzameling van  $\mathbf{x}^A$ .

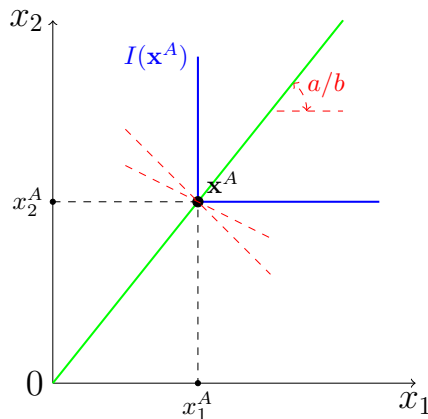
Beide resultaten samen laten ons toe om te besluiten dat voor de Leontief nutsfunctie (2.4), de indifferentie verzameling waartoe de goederenbundel  $\mathbf{x}^A = (6, 1)$  behoort wiskundig wordt beschreven door de volgende uitdrukking:

$$x_2(x_1, (6, 1)) = \begin{cases} 2 & \text{als } x_1 > 1 \\ [2, \infty] & \text{als } x_1 = 1 \\ \emptyset & \text{als } x_1 < 1. \end{cases}$$

Deze indifferentie verzameling is een indifferentiecurve, maar is geen functie, want met  $x_1 = 1$  wordt geen unieke waarde van  $x_2$  geassocieerd. De marginale substitutieverhouding van de Leontief nutsfunctie in een bepaald punt vinden we door minus de helling te nemen van de raaklijn aan de indifferentiecurve door dat punt. Indien  $ax_1 > bx_2$  (we bevinden ons rechts van de groene lijn in figuur 2.29), dan is de indifferentiecurve en dus ook de raaklijn horizontaal zodat de marginale substitutieverhouding gelijk is aan nul:  $MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^A} = 0 = MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^B}$ . Indien  $ax_1 < bx_2$  (we bevinden ons boven de groene lijn in figuur 2.29), dan is de indifferentiecurve en dus ook de raaklijn verticaal zodat de marginale substitutieverhouding gelijk is aan oneindig:  $MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^D} = MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^E} = \infty$ . In punten op de groene lijn, zoals het punt  $\mathbf{x}^C$ , is de helling van de raaklijn onbepaald, zodat  $MSV_{1,2}^{\mathbf{x}^C}$  onbepaald is. Dit geldt in het hoekpunt van elke indifferentiecurve van de Leontief nutsfunctie.

Toch kunnen we ook voor de Leontief nutsfunctie de substitutie-elasticiteit tussen de goederen in het hoekpunt van de Leontief nutsfunctie berekenen. Beschouw indifferentiecurve  $I(\mathbf{x}^A)$  in figuur 2.30.

Figuur 2.30: Substitutie-elasticiteit Leontief nutsfunctie



Voor elke eindige strikt positieve waarde van de marginale substitutieverhouding gaat de raaklijn aan de indifferentiecurve steeds door het punt  $\mathbf{x}^A$ . Als we de marginale substitutieverhouding veranderen, verandert  $x_2^A/x_1^A$  niet. Bijgevolg is de substitutie-elasticiteit van de Leontief nutsfunctie in het hoekpunt  $\mathbf{x}^A$  nul.

### 2.3.5 Voorbeeld 3: lineaire nutsfunctie

De lineaire nutsfunctie (met 2 goederen) wordt gedefinieerd als de functie  $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(2.5) \quad u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2,$$

waarbij  $a, b > 0$ . Zoals de benaming reeds zegt is het nut een lineaire functie van de hoeveelheden van  $x_1$  en  $x_2$ . Om de indifferenciecurve door een bepaald punt  $\mathbf{x}^A$  te vinden, definiëren we  $\bar{u} = u(\mathbf{x}^A)$ . Bijgevolg hebben we dat

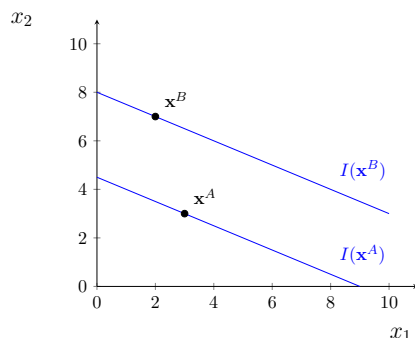
$$\bar{u} = u(\mathbf{x}^A) = ax_1^A + bx_2^A.$$

Als we deze functie oplossen naar  $x_2$  bekomen we de indifferenciecurve

$$x_2(x_1, \mathbf{x}^A) = \frac{u(\mathbf{x}^A)}{b} - \frac{a}{b}x_1,$$

zodat de indifferenciecurve een rechte is met intercept  $u(\mathbf{x}^A)/b > 0$  en richtingscoëfficiënt  $-a/b < 0$ . Met een lineaire nutsfunctie is de marginale substitutieverhouding in alle goederenbundels dezelfde en gelijk aan  $a/b$ . De volgende figuur illustreert de vorm van de indifferenciecurve voor de lineaire nutsfunctie met  $a = 1$  en  $b = 2$ .

Figuur 2.31: Indifferenciecurve bij lineaire nutsfunctie



In figuur 2.31 is de richtingscoëfficiënt van de indifferenciecurve  $I(\mathbf{x}^A)$  en  $I(\mathbf{x}^B)$  gelijk aan  $-a/b = -1/2$ . De marginale substitutieverhouding is in alle goederenbundels gelijk aan  $1/2$ .

## 2.4 Budgetbeperking

De bedoeling van dit hoofdstuk is om te analyseren hoe de consument beslist over de aankoop van consumptiegoederen. In de vorige afdelingen hebben we een kader ontwikkeld dat ons toelaat om te beschrijven (via preferenties en nutsfuncties) of een goederenbundel strikt beter is dan, even goed is als of strikt slechter dan een andere goederenbundel.

In deze afdeling gaan we na uit welke goederenbundels de consument kan kiezen. We veronderstellen dat de enige beperking waarmee hij geconfronteerd wordt zijn budgetbeperking is.

### 2.4.1 Definitie

De consument beschikt over een exogeen inkomen  $Z$  dat hij kan besteden aan  $k$  goederen. De prijs van goed  $i$  wordt gegeven door  $p_i$ . Zijn totale uitgaven worden gegeven door

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_kx_k = \sum_{i=1}^k p_ix_i.$$

De budgetbeperking zegt dat de totale uitgaven van de consument niet groter mogen zijn dan zijn inkomen:

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^k p_ix_i \leq Z.$$

De formele definitie van de budgetverzameling is als volgt.

**Definitie 20** *Budgetverzameling* : Gegeven  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^k$ , de prijsvector van de goederen die de consument kan kopen, en zijn inkomen,  $Z$ , is de budgetverzameling

$$B(\mathbf{p}, Z) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k p_ix_i \leq Z \right\}.$$

In het geval van 2 goederen vereist de budgetbeperking

$$\begin{aligned} Z &\geq p_1x_1 + p_2x_2 \\ \Leftrightarrow x_2 &\leq \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1. \end{aligned}$$

Voor de interpretatie is het aangewezen om eerst te kijken naar het geval waar deze ongelijkheid houdt met gelijkheid:

$$\begin{aligned} Z &= p_1x_1 + p_2x_2 \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1. \end{aligned}$$

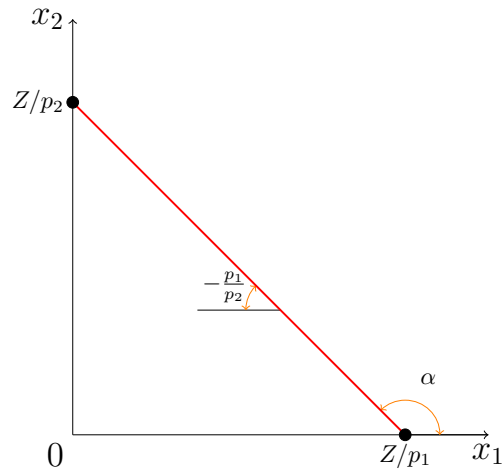
Deze vergelijking bepaalt de budgetrechte, zoals geïllustreerd in de volgende figuur.

De rode lijn is de budgetrechte. Het intercept (op de verticale as) is  $Z/p_2$ , de hoeveelheid van het tweede goed die de consument kan kopen indien zij haar hele inkomen besteedt aan het tweede goed. De rechte snijdt de horizontale as in de bundel  $(Z/p_1, 0)$ ;  $Z/p_1$  is de hoeveelheid van het eerste goed die de consument kan kopen indien zij haar hele inkomen besteedt aan het eerste goed. De richtingscoëfficiënt van de budgetrechte is  $-\frac{p_1}{p_2}$ , en geeft weer dat per extra eenheid van het eerste goed dat de consument wenst, zij  $\frac{p_1}{p_2}$  eenheden minder van het tweede goed kan kopen. De richtingscoëfficiënt van de budgetrechte is tevens gelijk aan de tangens van de hoek  $\alpha$ .

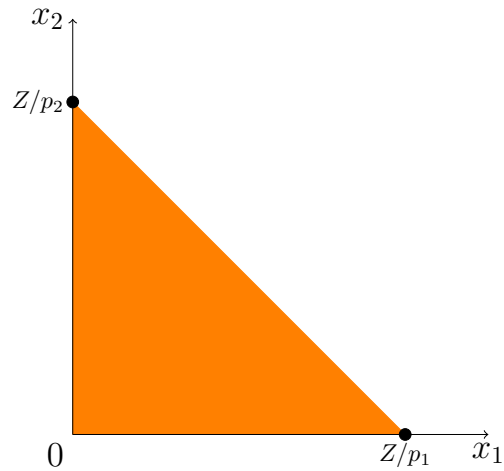
De budgetverzameling bevat alle goederenbundels die de consument kan kopen met haar inkomen: dit zijn alle goederenbundels die zich op of onder de budgetrechte bevinden. De budgetverzameling  $B(\mathbf{p}, Z)$  wordt voorgesteld door de oranje verzameling in figuur 2.33.

Hoe de budgetverzameling verandert indien de exogenen,  $Z$ ,  $p_1$  of  $p_2$  zich wijzigen wordt bepaald door hoe de budgetrechte reageert op de verandering van deze exogenen. Dit wordt bestudeerd in de volgende afdeling.

Figuur 2.32: Budgetrechte



Figuur 2.33: Budgetverzameling



### 2.4.2 Veranderingen in de budgetrechte ten gevolge van veranderingen in de exogene variabelen

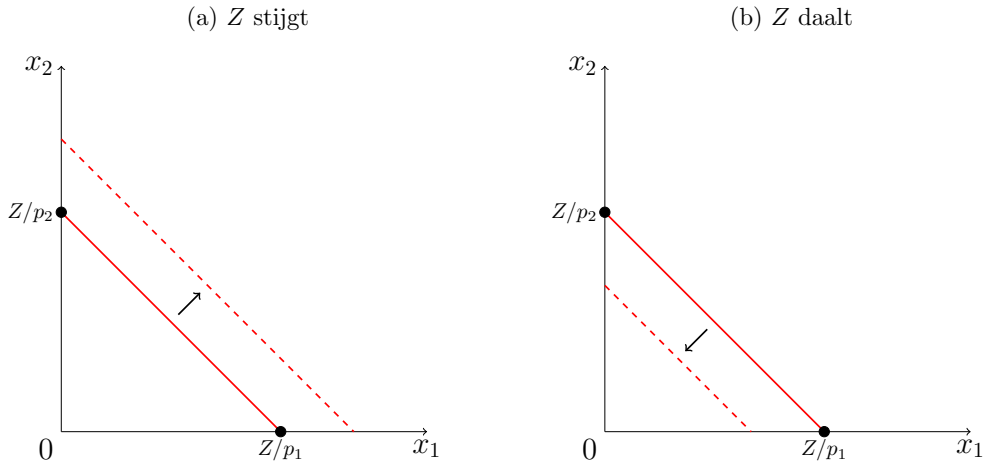
Het is mogelijk dat elk van de drie exogenen apart verandert. We bestuderen in de volgende figuren wat er gebeurt met de budgetrechte

$$x_2 = \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1.$$

In figuur 2.34 gaan we na wat de gevolgen zijn van een verandering in het inkomen van de consument. Het linkerpaneel geeft het gevolg van een inkomensstijging: de budgetrechte verschuift parallel naar boven: haar intercept stijgt en haar richtingscoëfficiënt verandert

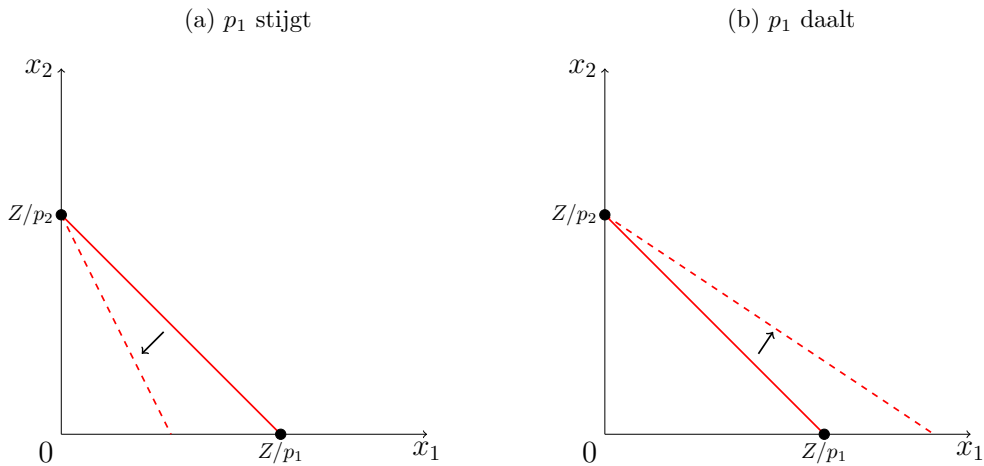
niet. Het rechterpaneel toont het gevolg van een inkomensdaling: de budgetrechte verschuift parallel naar beneden: haar intercept daalt en haar richtingscoëfficiënt verandert niet.

Figuur 2.34: Inkomenswijzigingen en verandering budgetrechte



Figuur 2.35 geeft het effect weer van een verandering in de prijs van het eerste goed. Het linkerpaneel geeft het effect weer van een prijsstijging. Het intercept van de budgetrechte verandert niet, maar de budgetrechte wordt steiler. Het rechterpaneel geeft het effect weer van een prijsdaling. Het intercept van de budgetrechte verandert niet, maar ze wordt minder steil.

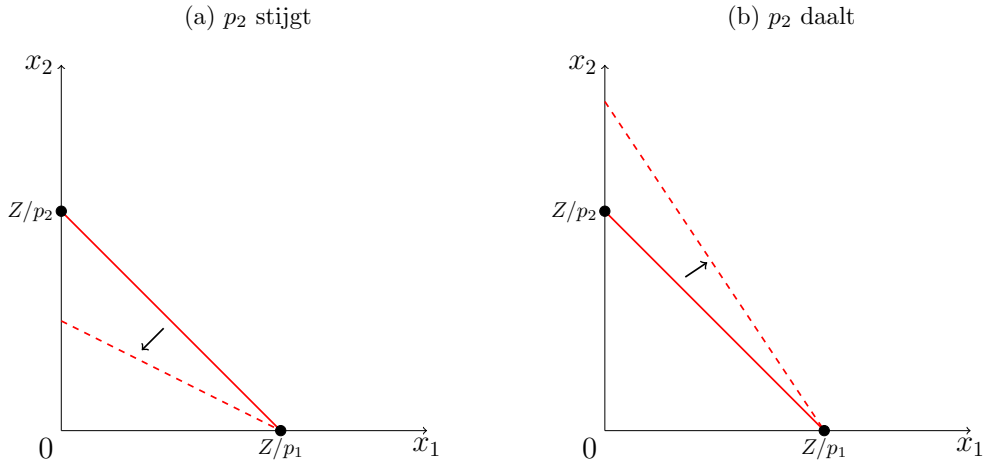
Figuur 2.35: Prijsverandering van  $x_1$  en verandering budgetrechte



Figuur 2.36 geeft het effect weer van een verandering in de prijs van het tweede goed. Het linkerpaneel geeft het effect weer van een prijsstijging. Het intercept van de budgetrechte verlaagt, het snijpunt van de budgetrechte met de horizontale as verandert niet en de budgetrechte wordt minder steiler. Het rechterpaneel geeft het effect weer van een prijsdaling. Het intercept van de budgetrechte verhoogt, het snijpunt van de budgetrechte met

de horizontale as verandert niet en de budgetrechte wordt steiler.

Figuur 2.36: Prijsverandering van  $x_2$  en verandering budgetrechte



Het is uiteraard mogelijk dat meer dan één exogene variabele zich wijzigt. We bekijken eerst het geval waarin de prijzen van beide goederen in dezelfde mate veranderen: beide prijzen worden vermenigvuldigd met een factor  $\lambda > 0$ . De oude budgetrechte

$$x_2 = \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1,$$

wordt nu vervangen door de budgetrechte

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{Z}{\lambda p_2} - \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2}x_1 \\ &= \frac{Z}{\lambda p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1. \end{aligned}$$

De richtingscoëfficiënt van de nieuwe budgetrechte is identiek aan deze van de oude budgetrechte; alleen het intercept van de budgetrechte is veranderd: als  $\lambda > 1$ , dan daalt het intercept, en lijkt het alsof de consument minder inkomen heeft. Het effect van deze verandering is dan ook gelijkaardig aan de verandering in figuur 2.34b. Als  $\lambda < 1$  dan stijgt het intercept en lijkt het alsof de consument meer inkomen heeft; de budgetrechte verschuift zoals in figuur 2.34a.

Tenslotte gaan we na wat er gebeurt indien de prijzen van beide goederen én het inkomen in dezelfde mate veranderen: beide prijzen en het inkomen worden vermenigvuldigd met een factor  $\lambda > 0$ . De oude budgetrechte

$$x_2 = \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1,$$

wordt nu vervangen door de budgetrechte

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\lambda Z}{\lambda p_2} - \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2}x_1 \\ &= \frac{Z}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1. \end{aligned}$$



De nieuwe budgetrechte valt samen met de oude budgetrechte. Indien alle prijzen en het inkomen in dezelfde mate veranderen, dan heeft dit geen enkel effect op de budgetrechte van de consument. Bijgevolg verandert zijn budgetverzameling niet en zal het gedrag van de consument evenmin veranderen.